

Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN · DAVID HILBERT · OTTO BLUMENTHAL · ERICH HECKE

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON

HEINRICH BEHNKE RICHARD COURANT HEINZ HOPF
MÜNSTER (WESTF.) NEW YORK ZÜRICH

GOTTFRIED KÖTHE KURT REIDEMEISTER
HEIDELBERG GÖTTINGEN

BARTEL L. VAN DER WAERDEN
ZÜRICH

142. BAND · 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 13. JANUAR 1961)



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

1961

Math.
Ann.

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869–1872), *Carl Neumann* (1869–1876), *Felix Klein* (1876–1924), *Adolph Mayer* (1876–1901), *Walther v. Dyck* (1888–1921), *David Hilbert* (1902–1939), *Otto Blumenthal* (1906–1938), *Albert Einstein* (1920–1928), *Constantin Carathéodory* (1925–1928), *Erich Hecke* (1929–1947), *Franz Rellich* (1947–1955).

Band 1–80 Leipzig, B. G. Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen“ sehr hoch. Sie betragen nach einer Kalkulation 6% des Gestehtungspreises eines Bandes. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein (Schreibmaschine oder klare Handschrift, Formeln im allgemeinen handschriftlich). Vorkommende gotische oder griechische Buchstaben sowie einander ähnelnde Zeichen sind besonders zu kennzeichnen, z. B. durch farbige Unterstreichung. Etwaige Abbildungen sind als Skizzen auf besonderen Blättern zu bringen. Die Abbildungs-Unterschriften gehören dagegen zum Text und sind dem Manuskript beizugeben.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, bevor noch Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Größere Änderungen und Zusätze, die sich nicht auf die Berichtigung von Irrtümern beschränken, bedürfen der Zustimmung der Redaktion und sollen, auch um der geschichtlichen Genauigkeit willen, in einer Fußnote als nachträglich gekennzeichnet und datiert werden.

Als Norm soll gelten, daß der Verfasser von jeder Arbeit *eine Fahrenkorrektur* und *eine Korrektur in Bogen* liest. Wir bitten unsere Verfasser, sich hiermit begnügen zu wollen.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen

Mathematische Annalen

Erscheinen zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Professor H. Behnke, Münster/Westf., Rottendorffweg 17,

Professor R. Courant, 142 Calton Road, New Rochelle, N. Y. USA,

Professor H. Hopf, Zollikon bei Zürich, Alte Landstraße 37,

Professor G. Kühle, Heidelberg, Mönchhofstr. 26, I,

Professor K. Reidemeister, Göttingen, Mathematisches Institut der Universität, Bunsenstr. 3–5,

Professor B. L. van der Waerden, Zürich 6, Bionstraße 18.

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite 3

Lokal-reguläre Bogen ohne $(n-2, k)$ -Sekanten im projektiven P_n ($n \leq k$)

Von

OTTO HAUPT in Erlangen

Einleitung

In einer vorangehenden Note [1]¹⁾ wurden Grundeigenschaften der Bogen ohne $(n-2, k)$ -Sekanten, auch im strengen Sinne, besprochen; $k = n + m$ mit $m \geq 0$ (vgl. die Definitionen in [1]). In der vorliegenden, an [1] unmittelbar anschließenden Note handelt es sich um weitere Eigenschaften solcher Bogen, und zwar jetzt unter der zusätzlichen Annahme, daß gewisse Teilbogen den (minimalen) Ordnungswert n besitzen oder daß der ganze Bogen Vereinigung endlich vieler solcher Bogen (vom Minimalordnungswert) ist.

Des Näheren wird im § 1 das Verhalten eines $(n+1)$ -tupels von Punkten auf einem von $(n-2, k)$ -Sekanten freien Bogen untersucht, wenn n der Punkte des $(n+1)$ -tupels einem Teilbogen des Ordnungswertes n angehören und wenn irgendwelche $n-1$ dieser n Punkte festgehalten sind, der n -te aber monoton auf dem Teilbogen bewegt wird; es handelt sich dabei um die Feststellung, daß auch der $(n+1)$ -te Punkt sich in je einem bestimmten Sinne monoton ändert. Im § 2 wird dann entsprechend die Änderung eines auf einer $(n-1)$ -Tangentialebene gelegenen Punktes des Bogens betrachtet, wenn der Berührungspunkt dieser Tangentialebene sich monoton auf dem Bogen bewegt; dabei wird meist sogar die Freiheit von $(n-2, k)$ -Sekanten im strengen Sinne gefordert.

§ 1. Über $(n+1)$ -tupel von Punkten eines Bogens ohne $(n-2, k)$ -Sekanten, von denen n Punkte einem Teilbogen n -ter Ordnung angehören

1.1. Bezeichnungen. Ist M eine Menge im n -dimensionalen projektiven Raum P_n , $n \geq 2$, so bezeichnet $L(M)$ die lineare Hülle von M , d. h. den kleinsten M enthaltenden projektiven Unterraum von P_n (vgl. [1], Nr. 1.1.). Sind y_1, \dots, y_n linear unabhängige Punkte in P_n , so werde gesetzt $L([i]) = L(\{y_i\}) = L\left(\bigcup_{1 \leq r \leq n} \{y_r\}\right)$. Ist ferner x ein von den y_r mit $r \neq i$ linear unabhängiger Punkt, so sei $L([i]x) = L(L([i]) \cup \{x\})$, also die von der $(n-2)$ -Ebene $L([i])$ und von x aufgespannte $(n-1)$ -Ebene. Entsprechend sei $L([i][j]x)$ die von den y_r mit $r \neq i, r \neq j$ und von x aufgespannte $(n-2)$ -Ebene ($i \neq j; i, j = 1, \dots, n$). Es ist somit $L = L(\{y_1\} \cup \dots \cup \{y_n\}) = L([i]y_i)$ und $L([i]) = L([i][j]y_j)$.

¹⁾ Im Text verweisen Ziffern in eckiger Klammer (z. B. [1], Nr. 2.2) auf die am Schluß der Arbeit angeführte Literatur.

Es sei A ein abgeschlossener, lokal rangmaximaler (vgl. [1], Nr. 1.3.), orientierter (einfacher) Bogen in P_n . Ist a' bzw. b' der Anfangs- bzw. Endpunkt von A , so setzen wir $A = B(a', b')$ und $\bar{A} = A - \{a'\} - \{b'\}$; es ist also \bar{A} der größte „offene“ Teilbogen von A .

1.2. Voraussetzungen über $A = B(a', b')$ (vgl. Nr. 1.1.).

(1) Es sei A frei von $(n-2, k)$ -Sekanten, $k \geq n$ (vgl. [1], Nr. 1.5.1.).

(2) Es sei A beschränkt, d. h. es existiere eine $(n-1)$ -Ebene $H_u \subset P_n$, so daß $A = \bar{A} \subset P_n - H_u = A_n$ (wobei also A_n ein n -dimensionaler affiner Raum ist).

(3) Es sei $a \in A$ regulär, d. h. es existiere eine Umgebung U von a auf A mit $\text{ord}(U) = n$ (vgl. [1], Nr. 1.2.). Dabei sei $a \neq b'$, während $a = a'$ zugelassen ist. Wir setzen $B = B(a, b')$.

(4) Es sollen $n+1$ Punkte $y_1, \dots, y_n, q \in \bar{B} = \bar{B}(a, b')$ existieren, die der gleichen $(n-1)$ -Ebene L angehören und diese $n+1$ Punkte seien die einzigen von $\bar{B} \cap L$; außerdem sei $y_r \in \bar{B} \cap U$, $r = 1, \dots, n$, wegen $\text{ord}(U) = n$ also $q \in \bar{B} - \bar{B} \cap \bar{U}$.

1.2.1. Bemerkung zu Nr. 1.2., Vor. (4).

(4a) Es kann o. B. d. A. und soll angenommen werden: Die y_r sind entsprechend der Orientierung von A so numeriert, daß a hinter y_1 , ferner y_j hinter y_{j+1} , $j = 1, \dots, n-1$ und y_n hinter q liegt.

(4b) Die y_r sind sämtlich Schnittpunkte von $L = L(\{y_1\} \cup \dots \cup \{y_n\})$ mit \bar{B} , also auch mit A .

In der Tat: Wegen $y_r \in \bar{B} \cap U$ sind die y_r innere Punkte von U , wobei $\text{ord}(U) = n$. Ist also z. B. y_1 Stützpunkt, so kann man so schließen: Da die y_r linear unabhängig sind (wegen $\text{ord}(U) = n$), existiert $L([1])$ eindeutig und ist fremd zu y_1 . Bei einer beliebig kleinen Drehung von $L = L([1] y_1)$ um $L([1])$ in geeigneter Richtung erhält man eine $(n-1)$ -Ebene L' , die außer den y_2, \dots, y_n noch mindestens 2 zu y_1 beliebig benachbarte Schnittpunkte mit U besitzt, also mit U insgesamt mindestens $n+1$ Punkte gemeinsam hat, im Widerspruch zu $\text{ord}(U) = n$.

(4c) Die y_r können o. B. d. A. und sollen als gewöhnlich differenzierbar (vgl. [1], Nr. 1.4.) angenommen werden.

Nämlich: Es ist U gewöhnlich differenzierbar in jedem Punkt mit Ausnahme von abzählbar²⁾ vielen Punkten ([1], Nr. 1.4.2., Satz 1.). Es sei nun etwa y_1 nicht gewöhnlich differenzierbar. Gemäß Nr. 1.2., Vor. (1) bzw. [1], Nr. 2.1., Satz, Beh. (1) (b), ist die (durch y_3, \dots, y_n, q aufgespannte) $(n-2)$ -Ebene $L([1] [2] q)$ eindeutig bestimmt und fremd zu y_1 und y_2 . Eine geeignete, hinreichend kleine Drehung von L um $L([1] [2] q)$ führt daher zu einer $(n-1)$ -Ebene L' , auf der je ein zu y_1 bzw. y_2 benachbarter, gewöhnlich differenzierbarer Schnittpunkt mit U liegt. Falls $n \geq 3$ und nicht jedes der y_3, \dots, y_n gewöhnlich differenzierbar ist, wiederholt man bei festgehaltenen y_1 und y_2 den Schluß und erhält schließlich eine zu L beliebig benachbarte, q enthaltende $(n-1)$ -Ebene, die mit U lauter gewöhnlich differenzierbare Schnittpunkte gemeinsam hat.

²⁾ „abzählbar viele“ bedeutet: keine oder endlich oder abzählbar unendlich viele.

1.2.2. Als weitere Voraussetzung wird (zu den in Nr. 1.2.) hinzugenommen:

(5) Es sei A *stückweise regulär*, d. h. Vereinigung endlich vieler (abgeschlossener, bis auf höchstens Begrenzungspunkte paarweise fremder) Bogen je vom Ordnungswert n .

Der Vor. (5) zufolge ist $\text{ord}(A)$ *beschränkt*, d. h. es hat A mit jeder $(n-1)$ -Ebene nur *beschränkt viele Punkte gemeinsam* (vgl. [1], Nr. 1.3., I).

Aus den Vor. (1)–(5) (Nr. 1.2., 1.2.2.) kann man außerdem folgern:

(1d) Falls q nicht *Schnittpunkt* von $B = B(a, b')$ mit L ist (vgl. Nr. 1.2., Vor. (4)), kann dies durch beliebig kleine Änderung von y_1 und damit auch von q bei festen y_2, \dots, y_n erreicht werden derart, daß das abgeänderte y_1 wieder gewöhnlich differenzierbar ist; damit Vor. (4) erfüllt bleibt, also $B(a, b') \cap L = \{y_1\} \cup \dots \cup \{y_n\} \cup \{q\}$ ist, hat man gleichzeitig b' durch einen geeigneten, zu q hinreichend benachbarten Punkt von B zu ersetzen. O. B. d. A. sei also q *Schnittpunkt* (und einziger Punkt von $(B - \bar{U}) \cap L$).

Beweis. Aus (5) folgt, daß $\text{ord}(A)$ beschränkt ist. Es sei q Stützpunkt auf L . Wir halten $L([1])$ fest. Da A n -Sek. frei ist, liegen y_1 und q nicht in $L([1])$. Da ferner y_1 Schnittpunkt von U mit L ist, gibt es in beliebig kleiner Umgebung von y_1 auf U solche gewöhnlich differenzierbare y'_1 , daß $L' = L(\{y'_1\} \cup L([1]))$ mit B einen beliebig nahe bei q gelegenen Schnittpunkt gemeinsam hat, der zugleich der am nächsten bei U gelegene Punkt von $B \cap L'$ ist; denn es gibt nur endlich viele L' , die mit $B - B \cap \bar{U}$ Stützpunkte gemeinsam haben (gemäß der nachstehenden Nr. 1.3.).

1.3. Spätere Überlegungen werden vereinfacht bei Benutzung des

Lemma. Voraussetzung. Es sei A *stückweise regulär*, insbesondere also lokal rangmaximal. Ferner sei L_{n-2} eine $(n-2)$ -Ebene, welche mit A (nur endlich viele Punkte, aber) keine Begrenzungspunkte hat. — *Behauptung.* Es gibt nur endlich viele L_{n-2} enthaltende $(n-1)$ -Ebenen L_{n-1} , auf welchen nicht zu L_{n-2} gehörige Stützpunkte von A mit L_{n-1} oder Begrenzungspunkte von A liegen.

Beweis. (I) Es sei $S' = L_{n-2}$ gesetzt. Es ist A , weil stückweise regulär, Vereinigung von endlich vielen, beschränkten, bis auf Begrenzungspunkte e paarweise fremden, abgeschlossenen Bogen A' mit $\text{ord}(A') = n$. Überdies kann angenommen werden, daß höchstens Begrenzungspunkte der A' auf S' liegen. Die Beh. des Lemmas ist daher richtig, wenn jedes beschränkte, zu S' bis auf Begrenzungspunkte fremde A' mit $\text{ord}(A') = n$ nur von endlich vielen $(n-1)$ -Ebenen L' mit $S' \subset L'$ in inneren Punkten von A' gestützt wird. Denn weitere, nicht in S' liegende Stützpunkte können nur in einen der endlich vielen Begrenzungspunkte der A' fallen.

(II) Zum Beweise der Beh. am Ende von Ziff. (I) kann man Projektion und vollständige Induktion anwenden. Die Beh. ist richtig für $n=2$; sie sei schon für $2 \leq n < N$ bewiesen. Man projiziere $A' \subset P_N$ aus einem Punkt z mit $z \in S' - S' \cap A'$ in einen, z nicht enthaltenden P_{N-1} . Weil $\text{ord}(A')$ beschränkt ist, projizieren sich nur endlich viele Punkte von A' in den gleichen Punkt von P_{N-1} . Die Projektion von S' bzw. von A' ist eine $(N-3)$ -Ebene S''

bzw. ein (nicht notwendig einfacher) Bogen A'' mit $\text{ord}(A'') \leq N$. Bekanntlich ist A'' stückweise regulär (vgl. [2], S. 141); daher ist A' Vereinigung von endlich vielen beschränkten, abgeschlossenen, bis auf höchstens Begrenzungspunkte untereinander und zu S' fremden Bogen A_r' , deren jeder schlicht auf einen beschränkten Bogen $A_r'' \subset P_{N-1}$ mit $\text{ord}(A_r'') = N-1$ projiziert wird. Aber jedes L' mit $S' \subset L'$ projiziert sich in eine $(N-2)$ -Ebene $L'' \subset P_{N-1}$ und jeder Stützpunkt von A_r' mit L' in einen Stützpunkt von A_r'' mit L'' ; und umgekehrt. Da die Beh. für A_r'' richtig ist, gilt sie auch für A_r' und damit für A' und A .

1.4. Unter einer Seite bzw. offenen Seite der $(n-1)$ -Ebene E im affinen Raum A_n verstehen wir einen der beiden, von E begrenzten abgeschlossenen bzw. offenen n -Halbräume von A_n .

Es sollen A, a, U, y_r, q die in Nr. 1.2.—1.2.1. postulierten Eigenschaften (1)–(4c) besitzen. Ferner sei $V(y_r)$ bzw. $H(y_r)$ eine vordere bzw. hintere Umgebung von y_r auf U und $H(q)$ eine hintere Umgebung von q auf $B - B \cap \bar{U}$. Wir haben dann:

Es liegen $V(y_r)$ und $H(q)$ auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von $L = L(\{y_1\} \cup \dots \cup \{y_n\})$ in A_n , je nachdem $r \equiv n$ bzw. $r \equiv n-1 \pmod{2}$. Es liegen daher $H(y_r)$ und $H(q)$ auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von L , je nachdem $r \equiv n-1$ bzw. $r \equiv n \pmod{2}$.

Nämlich: Nach Vor. (4) (Nr. 1.2.) sind die y_r und q die einzigen Punkte von $Q \cap L$, wobei $Q = B(a, q)$; ferner sind die y_r sämtlich Schnittpunkte von Q mit L (Vor. (4b), Nr. 1.2.1.). Wegen Vor. (4a) werden y_r und q durch $n-r$ Schnittpunkte auf Q getrennt.

1.5. Unter den in Nr. 1.2. und 1.2.1. angeführten Voraussetzungen benötigen wir weiter Kriterien hinsichtlich der Lage von y_r und q , $r = 1, \dots, n$ in $L = L(\{y_1\} \cup \dots \cup \{y_n\})$ bezüglich der durch die y_j mit $j \neq r$; $1 \leq j \leq n$, aufgespannten $(n-2)$ -Ebene $L(\{r\})$; wegen der n -Sek. Freiheit von A ist $L(\{r\})$ nicht nur eindeutig bestimmt, sondern enthält auch (außer den y_j) keine weiteren Punkte von A , insbesondere also weder y_r noch q (vgl. [1], Nr. 2.1., Satz, Beh. (1) (b)).

Entsprechend handelt es sich auch um die Lage von y_j und y_{j+1} in L bezüglich $L(\{j\} [j+1] q)$, $1 \leq j \leq n-1$ (vgl. Nr. 1.1.). Dabei ist $L(\{j\} [j+1] x)$ eindeutig bestimmt, wenn etwa $x \in B - \left(\bigcup_r \{y_r\} \right)$, und enthält dann keine weiteren Punkte von A , also insbesondere weder y_j noch y_{j+1} (denn wegen Nr. 1.2., Vor. (1) sind je $n-1$ Punkte von B linear unabhängig (gemäß [1], Nr. 2.1., Satz).

1.5.1. Die in Nr. 1.5. eingangs gewünschten Lagekriterien werden formuliert unter Bezugnahme auf ein festgehaltenes, im übrigen beliebig gewähltes kartesisches Koordinatensystem in $L \cap A_n$ (vgl. Nr. 1.2., Vor. (2)), wobei wieder $L = L(\{y_1\} \cup \dots \cup \{y_n\})$ ist. Es seien $y_1, \dots, y_{r,n-1}$ die auf dieses System bezüglichen Koordinaten von y_r , $r = 1, \dots, n$, abgekürzt $y_r = (y_{r1}, \dots, y_{r,n-1})$; entsprechend ist $q(q_1, \dots, q_{n-1})$ und $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ zu verstehen. Man setze noch $y_{rn} = q_n = x_n = 1$ und bezeichne mit $\det(y_1, \dots, y_n)$

die Determinante der $y_{r\mu}$; $r, \mu = 1, \dots, n$. Ferner sei

$$\det([1]x) = \det(y_2, \dots, y_n, x)$$

sowie

$$\det([n]x) = \det(y_1, \dots, y_{n-1}, x)$$

und

$$\det([i]x) = \det(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n, x), \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

Dann gilt

$$\det([v]y_r) = (-1)^{n-r} \det(y_1, \dots, y_n).$$

Wegen $y_r \in U$ und $\text{ord}(U) = n$ (vgl. Nr. 1.2., Vor. (3)) ist $\det(y_1, \dots, y_n) \neq 0$; es kann und soll daher $\det(y_1, \dots, y_n)$ als *positiv* o. B. d. A. *angenommen* werden.

Analog zur Bezeichnung $L([j] [j']x)$ setzen wir

$$\det([j] [j']qx) = \det(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_{j'-1}, y_{j'+1}, \dots, y_n, q, x)$$

für $2 \leq j < j+2 \leq j' \leq n-1$; und entsprechend für $j=1$ oder $j+1=j'$ usw.

Schließlich setzen wir $\text{sign}(\alpha) = +1, -1, 0$ für $\alpha > 0, \alpha < 0, \alpha = 0$ und

$$z([v]x) = \text{sign}(\det([v]x)),$$

$$z([j] [j']qx) = \text{sign}(\det([j] [j']qx)).$$

Es ist

$$z([v]y_r) = (-1)^{n-r},$$

weil $\text{sign}(\det(y_1, \dots, y_n)) = 1$. Ferner ist

$$z([v]x) = \pm 1 \text{ bzw. } z([j] [j']qx) = \pm 1$$

genau dann, wenn x nicht in $L([v])$ bzw. nicht in $L([j] [j']q)$ liegt.

1.5.2. Durch $L([v])$ bzw. durch $L([j] [j']q)$ wird L in zwei abgeschlossene bzw. offene $(n-1)$ -Halbebenen $L([v]; \pm)$ bzw. $L([j] [j']q; \pm)$ zerlegt, die als die beiden *Seiten* bzw. *offenen Seiten* von $L([v])$ bzw. von $L([j] [j']q)$ in L bezeichnet seien. Für $x \in L$ gilt $x \in L([v]; \pm)$ genau dann, wenn $z([v]x) \neq 0$ ist usw. Wir haben nun:

(a) *Es liegen y_r und q in L auf der gleichen bzw. auf verschiedenen offenen Seiten von $L([v])$ je nachdem $z([v]q) = (-1)^{n-r} = z([v]y_r)$ bzw. $z([v]q) = -(-1)^{n-r} = -z([v]y_r)$ ist; $1 \leq r \leq n$.*

(b) *Es liegen y_j und y_{j+1} in L auf der gleichen bzw. auf verschiedenen offenen Seiten von $L([j] [j+1]q)$ je nachdem $z([j]q) \cdot z([j'+1]q) = +1$ bzw. $= -1$ ist; $1 \leq j \leq n-1$.*

Beweis. Betr. (a) Je nachdem ist $z([v]y_r) \cdot z([v]q) = +1$ bzw. $= -1$. Wegen $z([v]y_r) = (-1)^{n-r}$ (Nr. 1.5.1.) folgt die Beh. — Betr. (b) Je nachdem ist $z([j] [j+1]qy_j) \cdot z([j] [j+1]qy_{j+1}) = +1$ bzw. $= -1$. Wegen $z([j] [j+1]qy_j) = (-1)^{n-j}z([j+1]q)$ und $z([j] [j+1]qy_{j+1}) = (-1)^{n-j}z([j]q)$ folgt die Beh.

Anmerkung. Ist \mathfrak{S} das beschränkte, in L offene, von den $L([v])$, $v=1, \dots, n$, begrenzte $(n-1)$ -Simplex in L , und ist $x \in L$, so gilt $x \in \mathfrak{S}$ genau dann, wenn $z([v]x) = (-1)^{n-r}$, $v=1, \dots, n$. — Sind die $y_r \in U$ sämtlich

hinreichend benachbart zu a , so liegt kein $p \in B$ in \mathcal{S} . In der Tat: Andernfalls gibt es zu beliebig kleinen konvexen Umgebungen W von a in A_n Punkte $y_r \in W \cap U$ und $p \in B$ derart, daß $p \in \mathcal{S}$, wobei \mathcal{S} das von den y_r aufgespannte Simplex in L ist. Wegen $\text{ord}(U) = n$ ist $p \in B - U$. Es ist also $p \in (B - U) \cap W = D$; aber $D = \emptyset$ für hinreichend kleines W , weil $B - U$ positiven Abstand von a besitzt. Widerspruch.

1.6. Es soll jetzt die Änderung von q bei Drehung von $L = L(\{y_1\} \cup \dots \cup \{y_n\})$ um $L([\mu])$ untersucht werden. Dabei wird zu den Vor. (1)–(4c) (Nr. 1.2. und 1.2.1.) noch die Vor. (5) und (4d) (Nr. 1.2.2.) hinzugenommen. Gemäß (4d) ist also $q = q(y_\mu) = q([\mu]y_\mu)$ Schnittpunkt und einziger Punkt aus $(B - \bar{U}) \cap L$.

Bezeichnungen. Es sei $B_\varrho = B(y_{\varrho-1}, y_{\varrho+1})$, $2 \leq \varrho \leq n-1$; $y_0 = a$, $B_1 = B(a, y_2)$; $y_{n+1} = b^*$, $B_n = B(y_{n-1}, b^*)$, wobei b^* der Endpunkt von U ist; $2 \leq n$. Für $y \in \underline{B}_\mu$, $1 \leq \mu \leq n$, ist $L([\mu]y)$ die durch $L([\mu])$ und y aufgespannte $(n-1)$ -Ebene; wegen $L([\mu]) \cap \underline{B}_\mu = \emptyset$ ist $L([\mu]y)$ eindeutig bestimmt (vgl. Nr. 1.5.). Schließlich sei $T_1(x)$ die 1-Tangentialebene (Tangente) an B im gewöhnlich differenzierbaren Punkt $x \in B$.

1.6.1. Für die Drehung von $L = L([\mu]y_\mu)$ um $L([\mu])$ gilt:

(a) Konvergiert $y \in \underline{B}_\mu$ gegen $y_{\mu-1}$ oder $y_{\mu+1}$, so konvergiert $L([\mu]y)$ gegen die, durch $T_1(y_{\mu-1})$ oder $T_1(y_{\mu+1})$ und durch die $(n-2)$ -Ebene $L([\mu])$ aufgespannte, $(n-1)$ -Ebene $S(\mu-1)$ oder $S(\mu+1)$.

(b) Durchläuft y stetig und streng monoton den Bogen \underline{B}_μ , so vollführt $L([\mu]y)$ stetig und streng monoton eine Drehung um $L([\mu])$, die kleiner ist als π in jedem abgeschlossenen Teilbogen von \underline{B}_μ .

Beweis. Betr. (a) Es ist z. B. $S(\mu-1)$ eindeutig bestimmt; denn $T_1(y_{\mu-1})$ liegt nicht in $L([\mu])$, weil andernfalls $L([\mu])$ eine $(n-2, n)$ -Sekante ist (vgl. [1], Nr. 1.5.). Wegen $\lim L(\{y_{\mu-1}\} \cup \{y\}) = T_1(y_{\mu-1})$ für $y \rightarrow y_{\mu-1}$ ist $\lim L([\mu]y) = S(\mu-1)$. — Betr. (b) Dreht sich $L([\mu]y)$ nicht streng monoton, so enthält, weil die Drehung stetig ist, $U \cap L([\mu]y')$ für gewisse $y' \in \underline{B}_\mu$ neben y' und den y_j , $j \neq \mu$, noch einen Punkt von \underline{B}_μ im Widerspruch zu $\text{ord}(U) = n$. Ist ferner für $y', y'' \in \underline{B}_\mu$ mit $y' \neq y''$ die Drehung zwischen y' und y'' gleich π , also $L([\mu]y') = L([\mu]y'')$, so enthält $U \cap L([\mu]y')$ mindestens $n+1$ Punkte.

1.6.2. Änderung von $q = q([\mu]y_\mu)$ bei hinreichend kleiner Drehung von $L = L([\mu]y_\mu)$ um $L([\mu])$.

1.6.2.1. Wir betrachten zunächst so kleine Drehungen von L , daß $L([\mu]y) - L([\mu])$ nur Schnittpunkte mit $B - \bar{U}$ gemeinsam hat, und zwar genau einen, der mit $q([\mu]y)$ bezeichnet sei.

Daß eine solche Beschränkung für die Drehungen möglich ist, kann man so einsehen: Gemäß Nr. 1.2.2., (4d), ist $q = q([\mu]y_\mu)$ Schnittpunkt von $L([\mu]y_\mu) - L([\mu])$ mit B ; daher enthält $L([\mu]y) - L([\mu])$ für jedes zu y_μ hinreichend benachbarte $y \in \underline{B}_\mu$ mindestens einen Schnittpunkt. Da ferner q der einzige Punkt von $(B - \bar{U}) \cap (L([\mu]y_\mu) - L([\mu]))$ war, existiert gemäß Vor. (5) (Nr. 1.2.2.) sowie Nr. 1.3., Lemma, eine Umgebung W_μ von y_μ auf \underline{B}_μ derart, daß $D(y) = (B - \bar{U}) \cap (L([\mu]y) - L([\mu]))$ für jedes $y \in W_\mu$ weder

Begrenzungspunkte von B noch Stützpunkte enthält. Daraus folgt, daß $D(y)$ einpunktig ist; andernfalls existiert nämlich ein $y' \in W_\mu$, für welches $D(y')$, wenn keine Begrenzungspunkte von B , dann Stützpunkte enthält. Nun entsprechen y und $L([\mu]y)$ einander ein-eindeutig und stetig, sogar für alle $y \in B_\mu$ gemäß Nr. 1.6.1., (b). Ferner sind $L([\mu]y)$ und $q([\mu]y)$ für $y \in W_\mu$ einander ein-eindeutig (sowie stetig) zugeordnet, weil $D(y)$ einpunktig (sowie $q([\mu]y)$ Schnittpunkt) ist. Daher entsprechen y und $q([\mu]y)$ einander ein-eindeutig und stetig. Wir haben damit:

Es existiert eine Umgebung W_μ von y_μ auf B_μ von folgender Beschaffenheit: Für jedes $y \in W_\mu$ enthält $D(y) = (B - \bar{U}) \cap (L([\mu]y) - L([\mu]))$ genau einen Punkt, der mit $q([\mu]y)$ bezeichnet sei. Es ist $q([\mu]y)$ Schnittpunkt und (eindeutige) stetige Funktion von y .

1.6.2.2. Die vorstehende Feststellung (Nr. 1.6.2.1.) läßt sich ergänzen: Es ändert sich $q([\mu]y)$ streng monoton auf B , wenn y sich streng monoton auf B ändert. Zum Bew. betrachten wir eine (hinreichend kleine) vordere bzw. hintere Umgebung V_μ von y_μ bzw. H_μ von $q([\mu]y_\mu)$ auf B ; o. B. d. A. wird V_μ und H_μ als fremd zu $L([\mu]y_\mu)$ angenommen. Entsprechend sei H'_μ bzw. V'_μ eine hintere Umgebung von y_μ bzw. vordere von $q([\mu]y_\mu)$. (Man beachte, daß y_μ und $q([\mu]y_\mu)$ Schnittpunkte sind.)

(a) Zunächst mögen V_μ und H_μ , also H'_μ und V'_μ , auf der gleichen Seite von $L([\mu]y_\mu) = L$ liegen. Je nachdem nun y_μ und $q([\mu]y_\mu)$ auf der gleichen (Fall $(a +)$) oder auf verschiedenen Seiten (Fall $(a -)$) von $L([\mu])$ in L liegen, ändern sich y und $q([\mu]y)$ auf B im entgegengesetzten oder im gleichen Sinne (bei monotoner Änderung von y). Und dies gilt für $y \in W_\mu$.

In der Tat: Die Beh. ist richtig für $n = 2$. Für $n \geq 3$ führt man die Betrachtung zurück auf den Fall $n = 2$, indem man den A_n orthogonal auf eine zu $L([\mu])$ orthogonale 2-Ebene projiziert (vgl. dazu auch Nr. 1.7., III., (3), Bew.). Wesentlich ist dabei, daß y und $q([\mu]y)$ fremd zu $L([\mu])$ sind und $q([\mu]y)$ eindeutig und stetig ist.

(b) Es liegen V_μ und H_μ , also H'_μ und V'_μ auf verschiedenen Seiten von L . Man beweist entsprechend wie für (a): Liegen y_μ und $q([\mu]y_\mu)$ auf verschiedenen Seiten (Fall $(b +)$) oder auf der gleichen Seite (Fall $(b -)$) von $L([\mu])$ in L , so ändern sich y und $q([\mu]y)$ im entgegengesetzten oder im gleichen Sinne auf B . Und dies gilt für $y \in W_\mu$.

(c) Eine übersichtliche Zusammenfassung von (a) und (b) erhält man bei Heranziehung von Nr. 1.5.2. — Zunächst ist der Fall (a) gleichbedeutend mit $n - \mu \equiv 0 \pmod{2}$, also mit $(-1)^{n-\mu} = +1$ (Nr. 1.4.). Gemäß Nr. 1.5.2., (a) liegen Fall $(a +)$ bzw. $(a -)$ genau dann vor, wenn $z([\mu]q([\mu]y_\mu)) = (-1)^{n-\mu}$ bzw. $= -(-1)^{n-\mu}$, also wenn $z([\mu]q([\mu]y_\mu)) = +1$ bzw. $= -1$ ist. — Im Fall (b) hingegen ist $(-1)^{n-\mu} = -1$ und $z([\mu]q([\mu]y_\mu)) = -(-1)^{n-\mu} = +1$ bzw. $= (-1)^{n-\mu} = -1$ je nachdem Fall $(b +)$ oder $(b -)$ vorliegt. Und wegen der ein-eindeutigen Zuordnung von y und $q([\mu]y)$ in W_μ ist $q([\mu]y)$ sogar streng monoton. Wir haben demnach:

Für $y \in W_\mu$ (vgl. Nr. 1.6.2.1.) ist $q([\mu]y)$ eine eindeutige, stetige und streng monotone Funktion von y . Und zwar ist $q([\mu]y)$ gegen- bzw. gleichsinnig monoton auf B (bezüglich y), je nachdem $z([\mu]q([\mu]y_\mu)) = +1$ bzw. -1 ist.

1.6.3. Fortsetzung der Drehung von $L = L([\mu]y_\mu)$ um $L([\mu])$ über W_μ hinaus.

1.6.3.1. Zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnung ein: Ist $q([\mu]y)$ (soweit es existiert) gegen- bzw. gleichsinnig monoton für y aus einer Umgebung von y_μ (in B_μ), so sagen wir, es gehört y_μ (bei festen y_0 mit $0 \neq \mu$) zum Typus (+) bzw. (−). Man bemerkt:

(1) Ist $v \neq \mu$, so bleibt der Typus, zu dem y_ν bei festen y_0 mit $0 \neq v$ gehört, unverändert der gleiche für y_ν , wenn unter den y_0 das y_μ durch $y' \in W_\mu$ (vgl. Nr. 1.6.2.1.) ersetzt wird.

Beweis. Liegt, abgesehen von y_ν bzw. $q([v]y_\nu)$, eine vordere Umgebung V_ν von y_ν (auf B) auf der gleichen Seite von $L = L([\mu]y_\mu) = L([v]y_\nu)$ wie eine hintere Umgebung H von $q([\mu]y_\mu) = q([v]y_\nu)$, so gilt das Entsprechende auch für V_ν und eine hintere Umgebung H' von $q([\mu]y')$ bezüglich $L([\mu]y')$. Denn $L([\mu]y)$ ändert sich stetig mit y ; außerdem ist V_ν fremd zu allen $L([\mu]y)$ für y zwischen y_μ und y' , ebenso wie H' oder H je nachdem $q([\mu]y)$ sich (gemäß Nr. 1.6.2.2.) auf B gegen U hin oder von U fort bewegt. Ferner: Liegen y_ν und $q([\mu]y_\mu)$ auf der gleichen bzw. auf der entgegengesetzten Seite von $L([v])$ in $L = L([v]y_\nu)$, so gilt das Entsprechende auch für y_ν und $q([\mu]y')$. Dies ergibt sich so: Es ist $L([v][\mu]y')$ eine $(n-2, n-1)$ -Sekante des n -sekantenfreien Bogens B , also fremd zu y_ν und zu $q([\mu]y')$. Weiter sind $L([\mu]y)$, $L([v][\mu]y)$ und $q([\mu]y)$ stetige Funktionen von y , wobei $q([\mu]y) \subset L([\mu]y) - L([v][\mu]y)$. — Ebenso ergibt sich der Beweis für den Fall, daß V_ν und H auf verschiedenen Seiten von L liegen.

(2) Der Typus, zu dem y_μ bei festen y_0 mit $0 \neq \mu$ gehört, ist der gleiche wie derjenige, zu dem $y' \in W_\mu$ bei den nämlichen festgehaltenen y_0 mit $0 \neq \mu$ gehört.

Beweis. Analog wie für (1).

1.6.3.2. Nunmehr soll $q([\mu]y)$ über W_μ hinaus fortgesetzt werden.

Verabredung. Im Hinblick auf die späteren Anwendungen darf und soll die Betrachtung auf die Fälle beschränkt werden, daß sich $q([\mu]y)$ auf B monoton gegen U hin bewegt.

Bezeichnung. Es sei $L([\mu]y_\mu; +)$ diejenige offene Seite von $L = L([\mu]y_\mu)$ in A_n , auf welcher eine hintere Umgebung H_μ von $q([\mu]y_\mu)$, genauer H_μ , liegt; ferner sei $L([\mu]y_\mu; -)$ diejenige offene Seite von $L([\mu])$ in $L([\mu]y_\mu)$, auf der $q([\mu]y_\mu)$ liegt. Wir setzen $L([\mu]y_\mu; -) = A_n - L([\mu]y_\mu; +) - L([\mu]y_\mu)$ und $L([\mu]y_\mu; -) = L([\mu]y_\mu) - L([\mu]y_\mu; +) - L([\mu])$. Schließlich sei noch $L([\mu]y; +) = L([\mu]y_\mu; +) \cap L([\mu]y)$ für $y \in B_\mu$ gesetzt.

1.6.3.3. Wir betrachten zuerst den Fall $z([\mu]q([\mu]y_\mu)) = +1$ (vgl. Nr. 1.6.2.2., (c)). Zunächst sei $y \in W_\mu$. Im Hinblick auf die Verabredung in Nr. 1.6.3.2. hat man y in $B(y_\mu, w'')$ zu betrachten, wenn w'' der Endpunkt von W_μ ist (also vor y_μ liegt). Es ist dann $q([\mu]y) \in L([\mu]y; +)$, weil $B(y_\mu; q([\mu]y_\mu)) \subset L([\mu]y_\mu; +)$. Genauer: Es liegt $B(y_\mu; q([\mu]y))$ für $1 \leq \mu \leq n-1$ in einem offenen Winkelraum $w(y)$, der begrenzt wird von den offenen $(n-1)$ -

Halbebenen $L([\mu] | y; +)$ und $L([\mu] | y_\mu; -)$; für $\mu = n$ ist $\underline{B}(y_n; q([\mu]y))$ zu ersetzen durch $\underline{B}(y; q([\mu]y))$.

Da $w(y)$ streng monoton und stetig abnimmt, existiert $w(w'') = \lim w(y)$ für $y \rightarrow w''$. Ebenso existiert $q([\mu]w'') = \lim q([\mu]y)$. Es sind jetzt nur die folgenden drei Fälle denkbar:

(1) Es enthält $D(w'') = (B - \bar{U}) \cap L([\mu]w'')$ den Endpunkt b' von B oder (und) Stützpunkte p , die auf B sämtlich vor $q'' = q([\mu]w'')$ liegen. In diesem Fall ist q'' der am nächsten bei U gelegene Punkt aus $D(w'')$, und zwar Schnittpunkt. Gemäß Nr. 1.3., Lemma, existiert eine Umgebung W'' von w'' auf \underline{B}_μ derart, daß w'' das einzige $y \in W''$ ist, für welches $D(y) = (B - \bar{U}) \cap L([\mu]y)$ Stützpunkte oder b' enthält. Es kann daher $q(y)$ stetig und streng monoton in W'' hinein fortgesetzt werden. Man kann also W_μ zu $W_\mu \cup W''$ vergrößern.

(2) Es ist q'' selbst Stützpunkt. Dieser Fall kann nicht eintreten. Denn andernfalls existiert eine Umgebung Q'' von q'' auf B derart, daß $Q' = Q'' - \{q''\}$ in einer offenen Seite von $L([\mu]w'')$ in A_n liegt und mithin $Q' \subset w(w'')$ oder $Q' \subset L([\mu]y_\mu; +) - \overline{w(w'')}$ ist. Je nachdem ist $D(y) \cap Q''$ für die von w'' verschiedenen y in einer hinteren Umgebung von w'' auf B entweder leer oder enthält einen hinter q'' auf B gelegenen Schnittpunkt. Beides widerspricht der Definition von q'' .

(3) Der letzte noch denkbare Fall ist der, daß Stützpunkte p aus $D(w'')$ hinter q'' auf B liegen; unter diesen (endlich vielen) Stützpunkten sei p'' der am nächsten bei U gelegene. Dann liegt eine Umgebung von p'' auf B in $\overline{w(w'')}$, weil andernfalls für y aus einer hinteren Umgebung von w'' auf B schon hinter p'' gelegene Schnittpunkte vorhanden sind. Demgemäß existiert für jedes $y' \neq w''$ in einer vorderen Umgebung von w'' auf B mindestens ein Schnittpunkt $t(y')$ in $D(y')$, der auf B hinter p'' liegt, hingegen kein Stützpunkt, weil Stützpunkte nur für endlich viele y' auftreten (vgl. Nr. 1.3.). Es sei $t(y')$ der am nächsten bei U gelegene derartige Schnittpunkt (es gibt ja nur endlich viele Punkte in $D(y')$ (vgl. Nr. 1.2.2.); dabei gilt $t(y') \rightarrow p''$ für $y' \rightarrow w''$). Ferner ist der Typus (vgl. Nr. 1.6.3.1.) von y' bei festgehaltenen y_ρ mit $\rho \neq \mu$ der gleiche wie der von w'' und wie der von y_μ . In der Tat: Für $1 \leq \mu \leq n-1$ sind $B' = \underline{B}(y_n, q'')$ und $B' = \underline{B}(y_n; t(y'))$ fremd zu $L([\mu] | y'; -) \cup L([\mu])$; denn $B' \cup B'' \subset w(w'')$ und $q'', t(y')$ sind fremd zu $L([\mu])$; für $\mu = n$ tritt $\underline{B}(w'', q'')$ bzw. $\underline{B}(y', t(y'))$ an Stelle von B'' bzw. B' . Somit ist $q'' \in L([\mu] | w''; +)$ und $t(y') \in L([\mu] | y'; +)$. Da aber $y \in L([\mu]y) - L([\mu])$ ist und y sich stetig ändert, liegt y entweder stets in $L([\mu] | y; +)$ oder stets in $L([\mu] | y; -)$. Aus der Definition von q'' und $t(y')$ folgt weiter: Liegt eine vordere Umgebung von w'' z. B. auf der gleichen Seite von $L([\mu]w'')$ wie eine hintere Umgebung von q'' , so auch eine vordere Umgebung von y' auf der gleichen Seite von $L([\mu]y)$ wie eine hintere von $t(y')$.

Geht man nun von einem solchen y' bzw. $t(y')$ aus und setzt $q([\mu]y') = t(y')$, so lassen sich wegen der Invarianz des Typus (im Sinne von Nr. 1.6.3.1.) die Betrachtungen in Nr. 1.6.1. ff. erneut anwenden, nämlich auf y' , y_ρ für $\rho \neq \mu$ und $q([\mu]y')$ statt auf y_μ , y_ρ für $\rho \neq \mu$ und $q([\mu]y_\mu)$, bis wieder ein Stützpunkt auftritt. Da letzteres nur für endlich viele y eintritt (gemäß Nr. 1.3.), so gelangt

man nach endlich vielen Schritten mit y in beliebig kleine Umgebung von $y_{\mu+1}$ falls $\mu \leq n-1$ bzw. von b^* (vgl. Nr. 1.6.) falls $\mu = n$.

1.6.3.4. Im Falle $z([\mu]q([\mu]y_\mu)) = -1$ schließt man ebenso wie in Nr. 1.6.3.3. Gemäß der Verabredung in Nr. 1.6.3.2. läßt man dabei jetzt y monoton und stetig gegen $y_{\mu-1}$ streben bzw. für $\mu = 1$ etwa gegen a ; $1 \leq \mu \leq n$.

1.6.4. Aus dem in Nr. 1.6.—1.6.3.4. Bewiesenen läßt sich nunmehr zusammenfassend entnehmen der

Satz. Vor. (a) Es seien die Annahmen (1)—(4d) und (5) gemäß Nr. 1.2. bis 1.2.2. erfüllt. Es sei $y_0 = a$ der Anfangs- und $y_{n+1} = b^*$ der Endpunkt von U .—(b) Es sei $L(y) = L([\mu]y)$ die durch $L([\mu])$ und durch $y \in \underline{B}_\mu = \underline{B}(y_{\mu-1}, y_{\mu+1})$ aufgespannte $(n-1)$ -Ebene, $\mu = 1, \dots, n$. Ferner sei $q(y) = q([\mu]y)$ der am nächsten bei U gelegene (stets vorhandene) Punkt von $(B - \bar{U}) \cap L(y)$.

Behauptung. Es wandert $q(y)$ monoton in Richtung auf U

(1) entweder wenn $z([\mu]q(y_n)) = +1$ ist und $y \in \underline{B}_\mu(y_\mu, y_{\mu+1})$ monoton (und stetig) gegen $y_{\mu+1}$ geht; $1 \leq \mu \leq n$.

(2) oder wenn $z([\mu]q(y_n)) = -1$ ist und $y \in \underline{B}_\mu(y_{\mu-1}, y_\mu)$ monoton (und stetig) gegen $y_{\mu-1}$ geht; $1 \leq \mu \leq n$.

Anmerkung. Für jedes $y \in \underline{B}_\mu$ ist $q(y)$ fremd zu \bar{U} .

1.7. Weiterhin sind jetzt die verschiedenen Vorzeichenkombinationen von $z([\mu]q)$ und $z([\mu+1]q)$ zu diskutieren, $1 \leq \mu \leq n-1$; dabei wird mit q der am nächsten bei U gelegene Punkt von $(B - B \cap \bar{U}) \cap L$ bezeichnet und mit L die $(n-1)$ -Ebene $L(\{y_1\} \cup \dots \cup \{y_n\})$.

Es sind die folgenden (einander ausschließenden) Fälle zu unterscheiden:

I. Es ist $z([v]q) = +1$ für jedes $v = 1, \dots, n$.

II. Es ist $z([v]q) = -1$ für jedes $v = 1, \dots, n$.

III. Es existiert (mindestens) ein μ mit $1 \leq \mu \leq n-1$ derart, daß $z([\mu]q) = +1$ und $z([\mu+1]q) = -1$ ist.

IV. Es existiert (genau) ein l mit $1 \leq l \leq n-1$ derart, daß $z([v]q) = -1$ für $1 \leq v \leq l$, und $z([v]q) = +1$ für $l+1 \leq v \leq n$.

1.7.1. Im Fall I enthält die $(n-1)$ -Tangentialebene $T_{n-1}(y_n)$ an U im gewöhnlich differenzierbaren Punkt $y_n \in U$ einen nicht zu \bar{U} gehörigen Punkt $q^0 \in B(a, q) = Q$.

Beweis. (1) Gemäß Nr. 1.6.4. gibt es in beliebig kleiner hinterer Umgebung $H(y_n)$ von y_n auf U einen gewöhnlich differenzierbaren Punkt y_{n-1}^1 derart, daß $Q' = Q - Q \cap \bar{U}$ mit der $(n-1)$ -Ebene $L(L([n-1]) \cup \{y_{n-1}^1\})$ Punkte q' gemeinsam hat, von denen der am nächsten bei U gelegene ein Schnittpunkt q_1 ist. Gemäß Nr. 1.6.3. liegt für $y_1, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}^1, y_n$ wieder der Fall I vor. Man erhält daher durch entsprechende Schlüsse, wie soeben, bei festen $y_1, \dots, y_{n-3}, y_{n-2}^1, y_{n-1}^1, y_n$ in beliebig kleiner, in $H(y_n)$ enthaltener hinterer Umgebung von y_{n-1}^1 ein gewöhnlich differenzierbares y_{n-2}^1 derart, daß auch die durch $y_1, \dots, y_{n-3}, y_{n-2}^1, y_{n-1}^1, y_n$ aufgespannte $(n-1)$ -Ebene mit Q' Punkte gemeinsam hat, deren am nächsten bei U gelegener ein Schnittpunkt q_2 ist. Fortsetzung dieses Verfahrens führt (nach insgesamt $n-1$ Schritten) zu gewöhnlich differenzierbaren $y_\mu^1 \in H^1 = H(y_n)$, $\mu = 1, \dots, n-1$, derart, daß

für $L^1 = L(\{y_1^1\} \cup \dots \cup \{y_{n-1}^1\} \cup \{y_n\})$ der am nächsten bei U gelegene Punkt q^1 von $Q' \cap L^1$ ein Schnittpunkt ist.

(2) Betrachtet man schließlich eine Folge von auf y_n sich zusammenziehenden hinteren Umgebungen H^r von y_n und die gemäß Ziff. (1) dazu konstruierten y_μ^r, y_n, q^r, L^r , so enthält die Folge der q^r eine konvergente Teilfolge; ihr Limes sei q^0 . Die entsprechende Teilfolge der $y_\mu^r, \mu = 1, \dots, n-1$, konvergiert gegen y_n . Und da y_n gewöhnlich differenzierbar ist, konvergieren die L^r gegen $T_{n-1}(y_n)$ (vgl. [1], Nr. 1.4.2., Satz 1); w. z. z. w.

1.7.II. Im Fall II enthält die $(n-1)$ -Tangentialebene $T_{n-1}(y_1)$ an U in dem gewöhnlich differenzierbaren Punkt y_1 einen nicht zu \bar{U} gehörigen Punkt $q_0 \in Q$.

Beweis. Mit Hilfe von Nr. 1.6.4. schließt man entsprechend wie in 1.7.I.

1.7.III. Weil B frei von $(n-2, k)$ -Sekanten ist (vgl. Nr. 1.2., Vor. (1)), kann der Fall III nicht eintreten.

Anmerkung. Für $n=2$ ist die Voraussetzung, daß B frei von $(n-2, k)$ -Sekanten sei, gleichbedeutend damit, daß B einfacher Bogen ist.

Beweis. (1) Ist erstens $n-\mu \equiv 0 \pmod{2}$, so liegen y_μ und q bzw. $y_{\mu+1}$ und q beide auf der gleichen Seite (in L) von $L([\mu])$ bzw. von $L([\mu+1])$ (gemäß Nr. 1.5.2., (a)). Ist zweitens $n-\mu \equiv 1 \pmod{2}$, so liegen aus dem gleichen Grunde y_μ und q bzw. $y_{\mu+1}$ und q beide auf verschiedenen Seiten (in L) von $L([\mu])$ bzw. von $L([\mu+1])$.

(2) Für $n=2$ kann der Fall III nicht auftreten. Denn hier ist $\mu=1$ und $n-\mu=1$, die 3 Punkte y_1, y_2 und q liegen (in A_2) auf einer Geraden und es kann nicht gleichzeitig y_2 zwischen y_1 und q sowie y_1 zwischen y_2 und q liegen.

(3) Gemäß Ziff. (2) kann $n \geq 3$ angenommen werden. Außerdem liegt q in L gemäß Ziff. (1) für $n-\mu \equiv 0 \pmod{2}$ in demjenigen offenen $(n-1)$ -dimensionalen Winkelraum $w(y_\mu, y_{\mu+1}) \subset L$, der begrenzt wird von derjenigen Seite von $L([\mu] [\mu+1])$ in $L([\mu])$ bzw. derjenigen in $L([\mu+1])$, in welcher $y_{\mu+1}$ bzw. y_μ liegt; und wobei außerdem $w(y_\mu, y_{\mu+1}) < \pi$ ist. Für $n-\mu \equiv 1 \pmod{2}$ treten an Stelle der Seiten, in denen y_μ bzw. $y_{\mu+1}$ liegt, diejenigen, in denen y_μ bzw. $y_{\mu+1}$ nicht enthalten sind.

Beweis. Es seien x_2, \dots, x_{n-1} kartesische rechtwinklige Koordinaten in $L([\mu] [\mu+1])$ (für $n=3$ entfallen diese, weil $L([\mu] [\mu+1])$ alsdann einpunktig ist); ferner sei die x_2 -Achse in $L([\mu])$ orthogonal zu $L([\mu] [\mu+1])$ gewählt und die x_1 -Achse in L orthogonal zu $L([\mu])$. Dementsprechend sei $L([\mu] [\mu+1])$ gekennzeichnet durch $x_1 = x_2 = 0$, x_r beliebig für $3 \leq r \leq n-1$, abgekürzt $L([\mu] [\mu+1]) = ((x_1 = 0, x_2 = 0))$; analog ist $L([\mu]) = ((x_1 = 0, x_2 = \text{beliebig}))$ und $L([\mu+1]) = ((c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0))$, wobei $c_2 \neq 0, c_1^2 + c_2^2 = 1$. Die beiden Seiten von $L([\mu] [\mu+1])$ in $L([\mu])$ bzw. in $L([\mu+1])$ sind dann $((x_1 = 0, x_2 \geq 0))$ bzw. $((c_1 x_1 + c_2 x_2 \geq 0))$. Ferner ist $y_\mu = ((y_{\mu 1} = y'_1, y_{\mu 2} = y'_2 \text{ mit } c_1 y'_1 + c_2 y'_2 = 0))$ und $y_{\mu+1} = ((y_{\mu+1, 1} = 0, y_{\mu+1, 2} = y''))$.

Die spezielle Wahl des Systems der x_1, \dots, x_{n-1} kommt hinaus auf senkrechte Projektion in die x_1, x_2 -Ebene, also hinaus auf Reduktion auf den Fall $n-1=2$; und für diesen ist die Behauptung (3) richtig.

(4) Gemäß Nr. 1.6.4. konvergiert $q(y)$ monoton gegen ein $q^0 \in Q' = Q - Q \cap \bar{U}$, wenn y , beginnend mit y_μ monoton und stetig gegen $y_{\mu+1}$ (auf $B(y_\mu, y_{\mu+1})$) konvergiert. Dabei bleibt der Typus von $y_{\mu+1}$ unverändert und der von y ist der gleiche wie der von y_μ (vgl. Nr. 1.6.3.1. und 1.6.3.3.). Daher bleiben die Feststellungen in Ziff. (1) und (3) auch richtig für $y, y_{\mu+1}, L(y)$ statt für $y_\mu, y_{\mu+1}, L$. Insbesondere liegt also $q(y)$ in demjenigen Winkelraum $w(y, y_{\mu+1})$, welcher bei der Änderung von y stetig aus $w(y_\mu, y_{\mu+1})$ hervorgeht. (Zum Beweis benutze man in $L(y)$ dasjenige Koordinatensystem (x'_1, \dots, x'_{n-1}) , welches aus dem der (x_1, \dots, x_{n-1}) durch die Drehung um $L([\mu])$ gewonnen wird; es ist also $x'_v = x_v, 2 \leq v \leq n-1$, und die x'_1 -Achse geht durch die Drehung aus der x_1 -Achse hervor. Dadurch reduziert man die Betrachtung auf die in der x'_1, x'_2 -Ebene, die mit der x_1, x_2 -Ebene identisch ist.) Wegen $y \rightarrow y_{\mu+1}$ konvergiert nun $w(y, y_{\mu+1})$ gegen Null; und wegen $q(y) \in w(y, y_{\mu+1})$ konvergiert $q(y)$ gegen den Punkt q^0 von $L([\mu])$, der von allen y_ν , also insbesondere von den in $L([\mu])$ enthaltenen $n-1$ der y_ν verschieden ist. Daher ist $L([\mu])$ eine $(n-2, n)$ -Sekante von B entgegen der Voraussetzung.

1.7.IV. Im Falle IV existiert ein $q' \in L(T_{l-1}(y_1) \cup T_{n-l-1}(y_n))$, wobei rechts eine $(n-1)$ -Ebene steht.

1.7.1. Wenn B sogar im strengen Sinne frei ist von $(n-2, k)$ -Sekanten (vgl. [1], Nr. 1.5.1.), liegt stets der Fall I vor.

Beweis. (1) Es ist zu zeigen, daß erstens $z([\mu]q) \cdot z([\mu+1]q) = +1$ für jedes $\mu = 1, \dots, n-1$ und daß zweitens $z([n]q) = +1$ ist.

(2) Gemäß Nr. 1.5.2., (b) bzw. (a), ist Erstens bzw. Zweitens gleichbedeutend damit, daß y_μ und $y_{\mu+1}$ auf der gleichen Seite von $R = L([\mu][\mu+1]q)$ in L liegen bzw. y_n und q auf der gleichen Seite von $R' = L([n])$. Nun sind R und R' $(n-2)$ -Sekanten von B , die in L enthalten sind. Gemäß Nr. 2.1. (Satz, Beh. (2)) gibt es aber keinen Teilbogen von B , dessen Begrenzungspunkte beide in L , aber auf verschiedenen Seiten von R bzw. von R' liegen.

§ 2. Eigenschaften der $(n-1)$ -Tangential(halb)ebenen eines im strengen Sinne von $(n-2, k)$ -Sekanten freien Bogens

Für spätere Überlegungen sind weiter die nachfolgenden Feststellungen wichtig betreffend die Änderung, welche der Durchschnitt eines im strengen Sinne n -sekantenfreien Bogens B mit der $(n-1)$ -Tangential(halb)ebene in einem gewöhnlich differenzierbaren Punkt x erleidet bei Änderung von x .

2.1. Ein erstes hierhergehöriges Ergebnis ist enthalten in dem

Satz. Vor. Es sei $B = \bar{B} \subset P_n$ ein lokal rangmaximaler, im strengen Sinne von $(n-2, k)$ -Sekanten ($k \geq n$) freier Bogen (also beschränkt, vgl. [1], Nr. 2.1.1., Satz, Beh. (1) (a)). Es sei B in $a \in B$ gewöhnlich differenzierbar. Ferner sei $B(a)$ derjenige abgeschlossene Teilbogen von B , der a als Anfangspunkt besitzt, also die vor a liegenden Punkte von B enthält; und es sei $B^a = B(a) - \{a\}$.

Behauptung. (1) Jeder Punkt $z \in B^a \cap T_{n-1}(a)$ liegt sogar in $Th_{n-1}(a)$; dabei ist $T_{n-2}(a) \cap Th_{n-1}(a) = \emptyset$ (weil $Th_{n-1}(a)$ definitionsgemäß offen in $T_{n-1}(a)$ ist (vgl. [1], Nr. 1.4.)). — (2) Es sei S eine $(n-2, n-1)$ -Sekante von B ,

ferner E eine S enthaltende $(n-1)$ -Ebene; die beiden offenen, durch S begrenzten $(n-1)$ -Halbebenen von E seien H_1 und H_2 . Dann gibt es keinen zu S fremden abgeschlossenen Teilbogen T von B , der sowohl mit H_1 als mit H_2 Punkte gemeinsam hat.

Beweis. *Betr. Behauptung.* (I) (I) Es ist $T_{n-2}(a)$ eine $(n-2, n-1)$ -Paratingente (vgl. [1], Nr. 2.1., Satz, Beh. (2) (a)), also fremd zu $B - \{a\}$ (vgl. [1], Nr. 2.1., Satz, Beh. (2) (b)). Für $z \in B^a \cap T_{n-1}(a)$ gilt somit $z \in B^a \cap T'_{n-1}(a)$, wobei $T'_{n-1}(a) = T_{n-1}(a) - T_{n-2}(a)$ ist. — (II) Wir beweisen jetzt die Beh. (1) indirekt, nehmen also die Existenz eines $z \in B^a \cap H''$ an, wobei $H'' = Th_{n-1}(a) = T_{n-1}(a) - Th_{n-2}(a) - T_{n-2}(a)$ ist. Es sei b das Büschel der von $T_{n-2}(a)$ begrenzten offenen $(n-1)$ -Halbebenen H . Es gibt eine (beliebig kleine) einseitige Umgebung u von $H_0 = Th_{n-1}(a)$ in b der folgenden Art: Zu u existiert eine vordere, z nicht enthaltende Umgebung V von a auf B^a , so daß $H \cap V \neq \emptyset$ für jedes $H \in u' = u - \{H_0\}$; dies folgt aus der Existenz bzw. der Definition von $vTh_{n-1}(a)$. Es sei $H' \in u$ fest gewählt und $x' \in H' \cap V$. — (III) Für hinreichend kleines u ist der von H_0 und H' begrenzte, H'' nicht enthaltende, offene Winkelraum w_0 kleiner als $2^{-2}\pi$ und es ist H' nicht in $T_{n-1}(a)$ enthalten. Der von H' und H'' begrenzte, H_0 nicht enthaltende bzw. H_0 enthaltende, abgeschlossene Winkelraum sei w'' bzw. w' . Weiter sei T' der von $z \in H''$ und von $x' \in H'$ begrenzte, abgeschlossene Teilbogen von B^a und T ein kleinster, abgeschlossener Teilbogen von T' , dessen Begrenzungspunkte in H' und H'' liegen. Es ist $T \cap T_{n-2}(a) = \emptyset$ und es liegt T entweder in w'' oder in w' . Ist $T \subset w'$, so ist $T \cap L \neq \emptyset$ für jede, $T_{n-2}(a)$ enthaltende $(n-1)$ -Ebene L , weil die Öffnung von w' größer als π ist. Falls aber $T \subset w''$ ist, gilt $T \cap L \neq \emptyset$ für jedes L mit $L \cap w'' \neq \emptyset$ und es gilt $B(a, x') \cap L \neq \emptyset$ für jedes L mit $L \cap w_0 \neq \emptyset$ ($T_{n-2}(a) \subset L$); und weil jedes $H \in b$ in einem dieser L enthalten ist, gibt es kein zu B^a fremdes L . Weder für $T \subset w'$ noch für $T \subset w''$ kann also B streng n -sekantenfrei sein. — *Betr. Behauptung (2).* Existiert ein Teilbogen T' von B , dessen Begrenzungspunkte in H_1 und H_2 liegen, so schließt man wie beim Beweis betr. Behauptung (1), Ziff. (III), indem man $H_1 = H'$ und $H_2 = H''$, also $w_0 = \emptyset$ setzt und beachtet, daß w' und w'' jetzt je die Öffnung π besitzen und abgeschlossen sind.

2.2. Bezeichnungen. Es sei $B \subset P_n$ lokal rangmaximal, beschränkt und frei von $(n-2, k)$ -Sekanten ($n \leq k; 2 \leq n$). Ferner sei B in a sowie in $x, y \in B^a$ gewöhnlich differenzierbar (Betr. B^a , vgl. Nr. 2.1., Satz, Vor.; B^x hat entsprechende Bedeutung). Es sei $Th_{n-q}(z) = vTh_{n-q}(z) = hTh_{n-q}(z)$ gesetzt, $1 \leq q \leq n-1$ (für gewöhnlich differenzierbares $z \in B$).

Wir führen folgende *Abkürzungen* ein, wobei $1 \leq q \leq n-1$ sein soll:

(1) Es sei $L_{n-q}(a; y) = L(T_{n-q-1}(a) \cup \{y\})$ gesetzt; wegen $B \cap T_{n-q-1}(a) = \{a\}$ ([1], Nr. 2.1., Satz, Beh. (2) (b)) ist $L_{n-q}(a; y)$ eine (eindeutig bestimmte) $(n-q)$ -Ebene. Es ist $L_{n-q-1}(a; y) \subset L_{n-q}(a; y)$. Wegen $T_{n-2}(a) \cap \{x\} = \emptyset$ ist $T_{n-3}(a) \cap \{x\} = \emptyset$ und daher $L_{n-2}(a; x) \cap T_{n-2}(a) = T_{n-3}(a)$ sowie

$L_{n-2}(a; x)$ verschieden von $T_{n-2}(a)$. — Entsprechend bezeichnet $L_{n-q}(x; a)$ die (eindeutig bestimmte) $(n-q)$ -Ebene durch $T_{n-q-1}(x)$ und a .

Weiter sei $Lh_{n-1}(a; x)$ diejenige, durch $L_{n-2}(a; x)$ begrenzte, *offene* $(n-1)$ -Halbebene von $L_{n-1}(a; x)$, für die $Th_{n-2}(a) \cap Lh_{n-1}(a; x) = \emptyset$ ist.

(2) Für $2 \leq n$ bedeute $Lh_n(a; x)$ bzw. $Lh_n(x; a)$ diejenige, durch $L_{n-1}(a; x)$ bzw. durch $L_{n-1}(x; a)$ begrenzte, *offene* n -Halbebene, in welcher eine *vordere* Umgebung von x auf $B^x = B(x) - \{x\}$ liegt. Diese n -Halbebenen ebenso wie $Th_n(a)$ usw. existieren und sind eindeutig bestimmt, wenn z. B. der jeweils betrachtete Teilbogen von B endlichen Ordnungswert besitzt, wie dies im folgenden jeweils der Fall sein wird.

(3) Wie früher (vgl. [1], Nr. 2.2., Satz, Vor. und Beh. (1)) sei f bzw. f_B die Zentralprojektion von P_n aus a in eine $(n-1)$ -Ebene E bzw. die durch f induzierte (topologische) Abbildung von B auf $f(B)$; dabei wird a als gewöhnlich differenzierbar auf B angenommen und $f_B(a) = E \cap Th_1(a)$ gesetzt. Sind a und $x \in B^a$ gewöhnlich differenzierbar auf B , so auch $f_B(a)$ und $f_B(x)$ auf $f(B)$ (vgl. [1], Nr. 2.2., Satz, Beh. (5)). — Sinngemäß ist dann z. B. $L_{n-q-1}(f_B(x); f_B(a))$ die in E gelegene, bezüglich $f(B)$ gebildete $(n-q-1)$ -Ebene $L(T_{n-q-2}(f_B(x)) \cup \{f_B(a)\})$, soweit sie eindeutig bestimmt ist.

2.2.1. Wir beweisen nun den

Satz. Voraussetzung (1) Der Bogen $B(a)$ in P_n , $2 \leq n$, mit dem Anfangspunkt a sei lokal rangmaximal und frei von $(n-2, k)$ -Sekanten ($k \geq n$). — (2) Es sei a elementarer Punkt auf $B(a)$, es existiere also eine vordere Umgebung V von a auf $B(a)$ mit $\text{ord}(V) = n$; es ist dann $B(a)$ in a gewöhnlich differenzierbar (vgl. [1], Nr. 1.4.). — (3) Es sei $x \in V - \{a\}$ gewöhnlich differenzierbar. — (4) Bezeichnet man mit f bzw. g die Zentralprojektion aus a bzw. aus x in die $(n-1)$ -Ebene E , so sei $f(B(a))$ bzw. $g(B(a))$ beschränkt, ebenso wie $B(a)$ selbst (in $P_n - F_u$). Dabei sei $f_B(a) = E \cap Th_1(a)$ und $g_B(x) = E \cap Th_1(x)$ erklärt.

Behauptung. (I) Es ist $V \cap L_{n-1}(a; x) = V \cap L_{n-1}(x; a) = \{a\} \cup \{x\}$; dabei ist x Schnittpunkt von V mit $L_{n-1}(a; x)$.

(II) Für $1 \leq q \leq n-1$ bestehen die Beziehungen:

- (III)
$$\begin{aligned} f(L_{n-q}(a; x)) &= L(f(T_{n-q-1}(a)) \cup \{f_B(x)\}) \\ &= L_{n-q-1}(f_B(a); f_B(x)) = E \cap L_{n-q}(a; x); \\ f(L_{n-q}(x; a)) &= T_{n-q-1}(f_B(x)) = E \cap L_{n-q}(x; a); \\ g(L_{n-q}(a; x)) &= T_{n-q-1}(g_B(a)) = E \cap L_{n-q}(a; x); \end{aligned}$$
- (II2)
$$\begin{aligned} f(B^a \cap Th_n(a)) &= f(B^a) \cap Th_{n-1}(f_B(a)), \quad 3 \leq n; \\ f(B^a \cap \overline{Th_n(a)}) &= f(B^a) \cap \overline{Th_{n-1}(f_B(a))}; \end{aligned}$$
- (II3)
$$\begin{aligned} f(B^x \cap Lh_n(a; x)) &= f(B^x) \cap Lh_{n-1}(f_B(a); f_B(x)); \\ g(B^x \cap Lh_n(a; x)) &= g(B^x) \cap Th_{n-1}(g_B(a)); \end{aligned}$$
- (II4)
$$f(B^x \cap \overline{Lh_n(x; a)}) = f(B^x) \cap \overline{Th_{n-1}(f_B(x))}.$$

Zusatz. Die Vor. (4), derzufolge $B(a)$ sowie $f(B(a))$ und $g(B(a))$ beschränkt sind, ist von selbst erfüllt, falls $B(a)$ sogar im strengen Sinne frei ist von $(n-2, k)$ -Sekanten.

Beweis. Vorbemerkung. Aus $\text{ord}(V) = n$ bzw. aus $\text{ord}(f(V)) = \text{ord}(g(V)) = n-1$ (vgl. [1], Nr. 2.2., Satz, Beh. (2)) folgt, daß $Th_n(a)$, $Lh_n(a; x)$ und $Lh_n(x; a)$ bzw. $Th_{n-1}(f_B(a))$, $Th_{n-1}(g_B(a))$, $Lh_{n-1}(f_B(a); f_B(x))$ usw. existieren (vgl. Nr. 2.2., (2)). Außerdem ist $f(T \cap M) = f(T) \cap f(M)$ für jeden Teilbogen T von B und jeden, das Projektionszentrum enthaltenden projektiven Unterraum M von P_n (vgl. [1], Nr. 2.2., Satz, Bemerkung).

Betr. Behauptung. (I) Indirekt. Es sei x Stützpunkt oder es liege noch (mindestens) ein Punkt $y \in V - \{a\} - \{x\}$ auf $L = L_{n-1}(a; x)$. Ist x oder y Stützpunkt von L mit V , so gelangt man durch eine passende (beliebig kleine) Drehung von L um (das zu x und y fremde) $T_{n-2}(a)$ zu einer $(n-1)$ -Ebene L' durch $T_{n-2}(a)$, die mit $V - \{a\}$ mindestens zwei Schnittpunkte x' , x'' gemeinsam hat. Da $T_{n-2}(a) = vT_{n-2}(a)$ eine $(n-2, n-1)$ -Paratingente an V in a ist (vgl. [1], Nr. 1.4.1.), gibt es eine, zu $T_{n-2}(a)$ beliebig benachbarte $(n-2)$ -Ebene, die genau $n-1$, zu a beliebig benachbarte Punkte $x_1, \dots, x_{n-1} \in V$ enthält. Es gibt daher $(n-1)$ -Ebenen L'' , die mit V Punkte x_1, \dots, x_{n-1} gemeinsam haben und außerdem noch mindestens je einen zum Schnittpunkt x' bzw. x'' beliebig benachbarten Punkt, also insgesamt $n+1$ Punkte aus V enthalten, im Widerspruch zu $\text{ord}(V) = n$.

Betr. Behauptung. (II 1) *Erste Relation.* Es ist $L_{n-q}(a; x)$ die Menge aller Punkte z , welche darstellbar sind in der Gestalt $z = \beta'z' + \beta x$, wobei $z' \in T_{n-q-1}(a)$ beliebig ist und β, β' reelle Zahlen mit $|\beta| + |\beta'| > 0$ sind. Demgemäß ist $f(L_{n-q}(a; x))$ die Menge aller $f(z) = \beta'f(z') + \beta f_B(x)$. Wegen $f(T_{n-q-1}(a)) = T_{n-q-2}(f_B(a))$ (vgl. [1], Nr. 2.2., Satz, Beh. (4a)) ist daher $E \cap L_{n-q}(a; x) = L_{n-q-1}(f_B(a); f_B(x))$.

Zweite Relation. Diese ergibt sich aus $f(L_{n-q}(a; x)) = f(T_{n-q-1}(a))$ und $f(T_{n-q-1}(a)) = T_{n-q-1}(f_B(x))$ (gemäß [1], Nr. 2.2., Satz, Beh. (4)).

Dritte Relation. Da x das Projektionszentrum für g sein soll, ergibt sich die dritte Relation aus der zweiten durch Vertauschen von a mit x und von f mit g .

Betr. Behauptung. (II 2) *Erste Relation.* Es sei F_u die uneigentliche $(n-1)$ -Ebene in P_n . Definitionsgemäß (vgl. Nr. 2.2., (2)) ist $Th_n(a)$ in $P_n - F_u$ bzw. $Th_{n-1}(f_B(a))$ in $E - E \cap F_u$ diejenige durch $T_{n-1}(a)$ bzw. durch $T_{n-2}(f_B(a))$ begrenzte offene n -Halbebene bzw. $(n-1)$ -Halbebene, in welcher eine vordere Umgebung W von a auf B^a bzw. W' von $f_B(a)$ auf $f(B^a)$ liegt. Wegen $\text{ord}(V) = n$ bzw. $\text{ord}(f(V)) = n-1$ existiert $W \subset V$ bzw. $W' \subset f(V)$. Weil $W' = f(W)$ angenommen werden kann und weil $T_{n-2}(f_B(a)) = f(T_{n-1}(a))$ ist, folgt die behauptete Relation gemäß [1], Nr. 2.2.1., Satz, Beh. (II 2)).

Zweite Relation. Man ersetze im Beweis für die erste $Th_n(a)$ durch seine abgeschlossene Hülle $\overline{Th_n(a)}$.

Betr. Behauptung. (II 3) *Erste Relation.* Definitionsgemäß (vgl. Nr. 2.2., (2)) ist $Lh_n(a; x)$ in $P_n - F_u$ bzw. $Lh_{n-1}(f_B(a); f_B(x))$ in $E - E \cap F_u$ die durch $L_{n-1}(a; x)$ bzw. durch $L_{n-2}(f_B(a); f_B(x))$ begrenzte n - bzw. $(n-1)$ -Halb-

ebene, in welcher eine *vordere* Umgebung W von x auf B^x bzw. W' von $f_B(x)$ auf $f(B^x)$ liegt. Aus Beh. (I) folgt, daß $B^x \cap Lh_n(a; x) \neq \emptyset$ ist; es existiert also ein W und daher auch ein $W' = f(W)$. In Rücksicht auf (II 1), erste Relation, folgt nun die erste Relation von (II 3) wieder aus [1], Nr. 2.2.1., Satz, Beh. (II 2).

Zweite Relation. Da $Lh_n(a; x)$ von $L_{n-1}(a; x)$ begrenzt wird und da $g(L_{n-1}(a; x)) = T_{n-2}(g_B(a))$ ist (vgl. (II 1), dritte Relation), liegt $g(W)$ in einer von $T_{n-2}(g_B(a))$ begrenzten $(n-1)$ -Halbebene von $E - E \cap F_u$, definitionsgemäß also in $Th_{n-1}(g_B(a))$. Zuzufolge [1], Nr. 2.2.1., Satz, Beh. (II 2) folgt die zu beweisende Behauptung.

Betr. Behauptung. (II 4) Unter Verwendung von (II 1), zweite Relation, schließt man ganz entsprechend wie für Beh. (II 3), zweite Relation.

Betr. Zusatz. Folgt aus [1], Nr. 2.1.1., Satz, Beh. (1) (a); [1], Nr. 2.2., Satz, Zusatz; [1], Nr. 2.2.1., Satz, Beh. (II 1).

2.3. Ein weiteres Hilfsmittel für spätere Beweise wird geliefert durch den **Satz. Vor. (1).** Der Bogen $B = B(a)$ mit a als Anfangspunkt sei lokal rangmaximal und im strengen Sinne frei von $(n-2, k)$ -Sekanten ($n \leq k; 2 \leq n$). — (2) Ferner sei a elementar auf B und V eine vordere Umgebung von a auf B mit $\text{ord}(V) = n$. — (3) Es sei $x \in V - \{a\}$ gewöhnlich differenzierbar, sonst beliebig.

Behauptung. (I) Aus $B^a \cap Th_{n-1}(a) \neq \emptyset$ folgt $B^x \cap Th_{n-1}(x) \neq \emptyset$.

(II) Es ist $B(x) \cap Th_n(x) \subset B^a \cap Th_n(a)$.

Beweis. Vorbemerkungen.

Betr. Behauptung (I). Es genügt, zu zeigen, daß gilt:

(Ia) Aus $B^a \cap T_{n-1}(a) \neq \emptyset$ folgt $B^x \cap T_{n-1}(x) \neq \emptyset$

Denn gemäß Nr. 2.1., Satz, Beh. (1), liegt jeder Punkt von $B^a \cap T_{n-1}(a)$ in $B^a \cap Th_{n-1}(a)$ bzw. von $B^x \cap T_{n-1}(x)$ in $B^x \cap Th_{n-1}(x)$.

Betr. Behauptung (II). Es genügt, zu zeigen, daß gilt:

$$(W_n) \quad B^x \cap \overline{Th_n(x)} \subset B^x \cap Th_n(a).$$

In der Tat: Zunächst ist $B^x \subset B^a$, so daß aus (W_n) folgt:

$$(W_n^*) \quad B^x \cap \overline{Th_n(x)} \subset B^a \cap Th_n(a).$$

Da in $V^a = V - \{a\}$ Begrenzungspunkte von V'' nicht enthalten sind, ist $T_{n-1}(a)$ fremd zu V^a (wegen $\text{ord}(V) = n$, vgl. [1], Nr. 1.4.2., Satz 1., Zusatz); weil ferner definitionsgemäß $V^a \subset Th_n(a)$ (vgl. [1], Nr. 1.4.) und weil $x \in V^a$, ist somit $x \in Th_n(a)$. Da außerdem $x \in B^a$ ist, gilt $\{x\} \subset B^a \cap Th_n(a)$. Wegen $B(x) = B^x \cup \{x\}$ folgt daher die Beh. (II) aus (W_n^*) , also aus (W_n) .

Betr. Zentralprojektion. Nach Vor. ist der (abgeschlossene) Bogen B streng n -sekantenfrei, also beschränkt ([1], Nr. 2.1.1., Satz, Beh. (1) (a)), d. h. fremd zur uneigentlichen $(n-1)$ -Ebene F_u . Es seien f bzw. g die Zentralprojektionen aus a bzw. x in eine $(n-1)$ -Ebene E , die (von F_u verschieden, also nicht uneigentlich sowie) zu $Th_1(a)$ und $Th_1(x)$ nicht fremd ist und wobei $f_B(a) = E \cap Th_1(a)$ sowie $g_B(x) = E \cap Th_1(x)$ gesetzt wird. (Es ist übrigens $T_1(a) \cap T_1(x) = \emptyset$ für $n \geq 4$ (vgl. [1], Nr. 2.1., Satz, Beh. (2) (b))). Genügen

B , a , und x den Vor. des Satzes, so auch $f(B)$, $g(B)$, $f_B(a)$, $g_B(a)$ usw. (vgl. [1], Nr. 2.2., Satz und Zusatz).

Beweis. Betr. Behauptung (I a) (vgl. Vorbemerkungen).

Zwecks Anwendung vollständiger Induktion beweisen wir etwas mehr, nämlich die folgende *Behauptung*:

(I'_n) Aus $B^a \cap T_{n-1}(a) \neq \emptyset$ folgt neben

$$B^x \cap T_{n-1}(x) \neq \emptyset \text{ auch } B^x \cap L_{n-1}(a; x) \neq \emptyset.$$

Beweis von (I'_n) . Wir erledigen zunächst den Fall

(I'_2) , also $n = 2$. Es sei $B^a \cap T_1(a) \neq \emptyset$, also $Q = B^a \cap Th_1(a) \neq \emptyset$, und q_1 der auf B^a am nächsten bei a gelegene und daher zu V fremde Punkt von Q (die Existenz von q_1 folgt aus $B^a \cap Th_1(a) \neq \emptyset$ zusammen mit $V^a \cap Th_1(a) = \emptyset$, letzteres weil $\text{ord}(V) = 2$ ist). Weiter sei $Q_1 = \underline{B}(a, q_1)$ der offene, von a und q_1 begrenzte Teilbogen von B^a . Wegen $q_1 \in B^a - V$ und $x \in V$ ist $x \in Q_1$. Es ist x Schnittpunkt von $L = L(a; x)$ mit V und es ist $V^x \cap L = \emptyset$; denn $a, x \in V \cap L$ und $\text{ord}(V) = 2$. Daher liegt V^x auf der entgegengesetzten Seite von L wie $\underline{B}(a, x)$, also wie $Th_1(a)$ und daher wie q_1 . Wegen $V^x \subset Q_1^x$ ist mithin $D_1 = (Q_1^x - V^x) \cap L \neq \emptyset$. Und zwar liegen alle Punkte von D_1 auf der a nicht enthaltenden, durch x begrenzten Halbgeraden H von L ; denn die x enthaltende, von a begrenzte Halbgerade von L enthält wegen der strengen n -Sekantenfreiheit von B sämtliche Punkte von $B^a \cap L$ (weil sie x enthält), woraus wegen $\underline{B}(a, x) \cap L = \emptyset$ die Behauptung betr. H folgt. Wieder existiert der auf Q_1^x am nächsten bei x gelegene, zu V fremde Punkt q_2 von $Q_1^x \cap H$. Da x Schnittpunkt von V mit L ist, liegt $V - \{x\}$ auf der gleichen Seite von $T_1(x)$ wie a , also auf der entgegengesetzten Seite wie q_2 (denn a wird von q_2 auf L durch x getrennt). Daher ist $\underline{B}(x, q_2) \cap Th_1(x) \neq \emptyset$; dies folgt ebenso wie vorhin $Q_1^x \cap H \neq \emptyset$. Wegen $\underline{B}(x, q_2) \subset Q_1^x \subset B^x$ ist die Beh. (I'_2) bewiesen.

(I'_n) Es sei (I'_n) schon bewiesen für $2 \leq n < N$. Zwecks vollständiger Induktion bedienen wir uns folgender *Abkürzungen*:

$$D'_n = D'_n(x; B^x) = B^x \cap T_{n-1}(x);$$

$$E'_n = E'_n(a; x; B^x) = B^x \cap L_{n-1}(a; x);$$

$$F'_n = F'_n(a; B^a) = B^a \cap T_{n-1}(a);$$

$$F''_n = F''_n(a; B^x) = B^x \cap T_{n-1}(a).$$

Die Beh. (I'_n) läßt sich dann so formulieren:

(I'_n) Aus $F'_n \neq \emptyset$ folgt $D'_n \neq \emptyset$ und $E'_n \neq \emptyset$.

Für die *Projektionen der D'_n, \dots, F''_n* haben wir weiter:

$$(I'1) \quad g(D'_n) = g(B^x) \cap T_{n-2}(g_B(x)) = D'_{n-1}(g_B(x); g(B^x)) = \text{Def } D'^g_{n-1};$$

$$(I'2) \quad f(E'_n) = f(B^x) \cap L_{n-2}(f_B(a); f_B(x)) = E'_{n-1}(f_B(a); f_B(x); f(B^x)) = \text{Def } E'^f_{n-1};$$

$$(I'3) \quad g(E'_n) = g(B^x) \cap T_{n-2}(g_B(a)) = F''_{n-1}(g_B(a); g(B^x)) = \text{Def } F''^g_{n-1};$$

$$(I'4) \quad f(F'_n) = f(B^a) \cap T_{n-2}(f_B(a)) = F'_{n-1}(f_B(a); f(B^a)) = \text{Def } F'^f_{n-1}.$$

Es folgen: (I' 1) und (I' 4) aus [1], Nr. 2.2., Satz, Beh. (4), (4a) sowie Bemerkung; ferner (I' 2) und (I' 3) aus Nr. 2.2.1., Satz, Beh. (II 1), erste und dritte Relation.

Wir haben nun zu zeigen, daß (I'_N) richtig ist. Es sei also $F'_N \neq \emptyset$. Gemäß (I' 4) ist dann $F'_{N-1} \neq \emptyset$ für jede (wie oben definierte) Projektion f . Nach Induktionsannahme gilt (I'_{N-1}) , also $E'_{N-1} \neq \emptyset$. Zuzufolge (I' 2) ist dann $f(E'_N) \neq \emptyset$, also $E'_N \neq \emptyset$. — Wegen (I' 3) folgt $F''_{N-1} \neq \emptyset$. Aus $B^x \subset B^a$ folgt aber $F'_{N-1} \subset F''_{N-1}$ und damit $F'_{N-1} \neq \emptyset$. Gemäß Induktionsannahme ist also $D'_{N-1} \neq \emptyset$ (wegen $F'_{N-1} \neq \emptyset$). Und zuzufolge (I' 1) ist dann auch $D'_N \neq \emptyset$. Es gilt also (I'_N) ; w. z. z. w.

Beweis. Betr. Behauptung. (W_n) (vgl. Vorbemerkungen).

Bei dem wieder durch vollständige Induktion zu führenden Beweis bedienen wir uns der folgenden *Abkürzungen*:

$$D_n = D_n(x; B^x) = B^x \cap \overline{Th_n(x)};$$

$$E_n = E_n(a; x; B^x) = B^x \cap Lh_n(a; x);$$

$$F_n = F_n(a; B^x) = B^x \cap Th_n(a).$$

Für die Projektionen dieser D_n, E_n, F_n gilt:

$$(II' 1) \quad g(D_n) = g(B^x) \cap \overline{Th_{n-1}(g_B(x))} = D_{n-1}(g_B(x); g(B^x)) =_{\text{Def}} D_{n-1}^g;$$

$$(II' 2) \quad g(E_n) = g(B^x) \cap Th_{n-1}(g_B(a)) = F_{n-1}(g_B(a); g(B^x)) =_{\text{Def}} F_{n-1}^g;$$

$$(II' 3) \quad f(E_n) = f(B^x) \cap Lh_{n-1}(f_B(a); f_B(x)) = E_{n-1}(f_B(a); f_B(x); g(B^x)) =_{\text{Def}} E_{n-1};$$

$$(II' 4) \quad f(F_n) = f(B^x) \cap Th_{n-1}(f_B(a)) = F_{n-1}(f_B(a); f(B^x)) =_{\text{Def}} F_{n-1}^f.$$

Es folgen: (II' 1) und (II' 4) aus Nr. 2.2.1., Satz, Beh. (II 2); ferner (II' 2) und (II' 3) aus Nr. 2.2.1., Satz, Beh. (II 3).

Wir können nun (W_n) so schreiben

$$(W_n) \quad D_n \subset F_n \text{ oder } D_n \cap F_n = D_n.$$

Für den Induktionsschluß beweisen wir etwas mehr, nämlich die beiden folgenden Enthaltenseinsrelationen, aus denen wiederum (W_n) folgt:

$$(W_{n1}) \quad D_n \subset E_n \text{ oder } D_n \cap E_n = D_n,$$

$$(W_{n2}) \quad E_n \subset F_n \text{ oder } E_n \cap F_n = E_n.$$

Schließlich *bezeichnen* wir die auf $f(B)$ bzw. $g(B)$ (statt auf B) bezüglichen Relationen $(W_n), (W_{ni})$ mit $(W_n^f), (W_n^g), (W_{ni}^f), (W_{ni}^g), i = 1, 2$, und mit $(f(W_n)), (g(W_n))$ usw. die aus (W_n) usw. folgenden Relationen

$$f(D_n \cap F_n) = f(D_n) \cap f(F_n) = f(D_n) \text{ bzw. } g(D_n \cap F_n) = g(D_n) \cap g(F_n) = g(D_n) \text{ usw.}$$

Wegen [1], Nr. 2.2., Satz, Beh. (I) gilt dabei:

$$(II' 5) \quad \text{Es sind gleichwertig: } (W_n) \text{ und } (f(W_n)); (W_n) \text{ und } (g(W_n)); (W_{ni}) \text{ und } (f(W_{ni})) \text{ bzw. } (g(W_{ni})).$$

$$\text{Aus } (II' 1) \text{—}(II' 4) \text{ folgt } (g(W_{n1})) = (W_{n-1}^g) \text{ und } (f(W_{n2})) = (W_{n-1,2}^f).$$

Wegen (II' 5) ergibt dies:

$$(II' 6) \quad \text{Aus } (W_{n-1}^g) \text{ folgt } (W_{n1}); \text{ und aus } (W_{n-1,2}^f) \text{ folgt } (W_{n2}).$$

Jetzt kann der Induktionsbeweis so geführt werden: Für $n=2$ ist die Behauptung, d. h. (W_{n1}) und (W_{n2}) , richtig (vgl. auch den Beweis betr. Beh. (Ia); (I₂)). Die Behauptung sei schon für $2 \leq n < N$ bewiesen, d. h. für jedes der Vor. unseres Satzes (Nr. 2.3.) genügende $B^* \subset P_{N-1}$. Gemäß [1], Nr. 2.2., Satz und Zusatz genügen aber $f(B)$ und $g(B)$ in P_{N-1} der Vor. des Satzes, wenn dies für B in P_N der Fall ist. Nach Induktionsannahme ist also $(W'_{N-1,2})$ und (W''_{N-1}) richtig. Gemäß (II' 6) gilt folglich (W_{N2}) und (W_{N1}) für B in P_N , woraus (W_N) folgt; w. z. z. w.

Literatur

- [1] HAUPT, O.: Über einige Grundeigenschaften der Bogen ohne $(n-2, k)$ -Sekanten im projektiven P_n ($n \leq k$). Math. Ann. **139**, 151—170 (1959).
- [2] HAUPT, O.: Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung. Math. Ann. **108**, 126—142 (1933).

(Eingegangen am 6. Mai 1960)

A further Extension of a result of Mordell's

By

J. CHIDAMBARA SWAMY and N. VENKATESWARA RAO in Visakhapatnam (India)*

§ 1. Notation

Throughout this paper x stands for the positive integral variable; and in the context of each proposition, stated or proved, $r, n, m, a_1, a_2, \dots, a_m, c_1, c_2, \dots, c_m$, stand for non-negative integers satisfying

$$(1.1) \quad r \geq 1;$$

$$(1.2) \quad 1 < m \leq n;$$

$$(1.3) \quad 0 < a_1 < n;$$

$$(1.4) \quad \sum_{i=1}^m a_i = n.$$

For any function $f(x)$, the symbolic sentences " $f(x)$ is $I \rightarrow I$ ", " $f(x)$ is $N \cdot I \rightarrow I$ ", and " $f(x)$ is $I \rightarrow S$ ", stand respectively for " $f(x)$ is integral for an infinity of values of x ", " $f(x)$ is non-integral for an infinity of values of x ", and " $f(x)$ is integral for all sufficiently large values of x ". We also use the symbols $|\cdot|$, $[x]$, familiar in elementary number theory.

$$(1.5) \quad \psi(x) \text{ denotes } \frac{(nx - r)!x}{\prod_{i=1}^m (a_i x + c_i)!}$$

We shall write

$$(1.6) \quad y \text{ for } \sum_{i=1}^m c_i \text{ and } z \text{ for } r + \sum_{i=2}^m c_i.$$

§ 2. Introduction

Generalising a true conjecture of ERDÖS, viz.,

$$\frac{(2x)!}{x!(x + c_2)!} \text{ is } I \rightarrow I,$$

MORDELL¹⁾ [1] proved, in effect, that $\psi(x)$ is $I \rightarrow I$, if

$$(2.1) \quad n \text{ is a prime};$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} a_j = a_1, & c_j = 0 & \text{for } 1 \leq j \leq l \\ a_j = a_{l+1}, & c_j = c_{l+1} & \text{for } l+1 \leq j \leq m; \end{cases}$$

$$(2.3) \quad r = 1.$$

*) Andhra University, Waltair.

¹⁾ MORDELL's and WRIGHT's results contain $(px - 1)!(px)$ in the numerator, but a close examination of their argument shows that the factor p in the second term of this product can be omitted.

WRIGHT¹) [2] generalised Mordell's result by replacing (2.2) by the simple condition $c_1 = 0$.

McANDREW [3] further generalised Wright's result for any integer n with $c_1 = 0$ and $r = 0$, and he remarks that it can be reasonably conjectured that the condition $c_1 = 0$ may be relaxed but it appears to be difficult.

It is therefore natural to enquire whether some positive values of c_1 or positive values of r , or both are admissible. A fairly satisfactory generalisation in this direction is proved in this paper as

Theorem I. If

$$(2.4) \quad \frac{n}{(a_1, n)} > r$$

and either

$$(2.5) \quad \frac{a_1}{(a_1, n)} > c_1 \text{ or } \frac{n}{(a_1, n)} > y$$

then $\psi(x)$ is $I \rightarrow I$.

In the context of this theorem a relevant problem is to determine, for a given set of values of a_1, a_2, \dots, a_m , the sets of all r and c_1 , for each of which $\psi(x)$ is $I \rightarrow S$; if, in any of the cases covered by theorem I, $\psi(x)$ is $I \rightarrow S$, the result of the theorem in that case would obviously be pointless. Some boundary cases of this problem are dealt with in this paper as

Theorem II.

$$(a) \quad \frac{(2x-1)!x}{(x+1)!x!} \text{ is } N \cdot I \rightarrow I.$$

$$(b) \quad \frac{(nx)!}{(x!)^{n-1}(x+n+1)!} \text{ is } N \cdot I \rightarrow I.$$

$$(c) \quad \frac{(nx)!}{(x!)^{n-1}(x+n-1)!} \text{ is } I \rightarrow S.$$

(d) If $n+1$ is a prime or $n=3$, then

$$\frac{(nx)!}{(x!)^{n-1}(x+n)!} \text{ is } N \cdot I \rightarrow I.$$

(e) If $n+1$ is not a prime and $n \neq 3$, then

$$\frac{(nx)!}{(x!)^{n-1}(x+n)!} \text{ is } I \rightarrow S.$$

§ 3. Preliminary considerations and further notation

Let p^α be the highest power of a prime p dividing n . The set of all such prime powers can be split into two classes: those for which $p^\alpha \nmid (a_1, a_2, \dots, a_m)$ and those for which $p^\alpha \mid (a_1, a_2, \dots, a_m)$. Now we write

$$(3.1) \quad b_1 = \text{Product of all } p^\alpha \text{ for which } p^\alpha \nmid (a_1, a_2, \dots, a_m)$$

$$(3.2) \quad b_2 = \text{Product of all } p^\alpha \text{ for which } p^\alpha \mid (a_1, a_2, \dots, a_m)$$

($b_2 = 1$, in case there is no prime of the second kind) so that

$$(3.3) \quad n = b_1 b_2.$$

We further write: π for the least prime factor of n ; μ for the least positive integer such that

$$(3.4) \quad \text{Max}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ p^{\alpha_i} | b_i}} \left| \frac{a_i}{p^{\alpha_i}} - \frac{n}{p^{\alpha_i}} \right| < \pi^{\mu}; \quad (\mu = 1, \text{ in case } b_2 = 1)$$

$$(3.5) \quad T \text{ for } b_2^{\mu} \varphi(k_2) \varphi(b_2)$$

where k_2 is the number introduced immediately after the proof of lemma 1 below; $l_1, l_2, \dots, l_t, \dots$ for a sequence of positive integers so chosen that

$$(3.6) \quad \pi^{l_i-1} > \text{Max}_{1 \leq i \leq m} c_i; \quad \pi^{l_i-1} > n^{l_i-1} T \text{ for } i > 1$$

$$(3.7) \quad X_j \text{ for } n^{l_j T-1}; \quad x_i \text{ for } \sum_{j=1}^i X_j;$$

$$(3.8) \quad I(u, q) \text{ for } \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[\frac{u}{q^{\lambda}} \right] \text{ for } q > 1;$$

and $A(x)$ and $B(x)$ respectively for the polynomials in x :

$$(3.9) \quad A(x) = \left\{ \prod_{l=1}^r (nx - l) \right\} n \left\{ \prod_{i=1}^y (nx + l) \right\}$$

$$(3.10) \quad B(x) = \left\{ \prod_{l=1}^z (a_1 x - l) \right\} a_1 \left\{ \prod_{l=1}^c (a_1 x + l) \right\}.$$

§ 4

Lemma I. Under the conditions (2.4) and (2.5), there exist polynomials $L(x)$ and $M(x)$ with integer coefficients and a positive integer K such that

$$A(x) L(x) + B(x) M(x) = K.$$

Proof: We first observe that $A(x)$ and $B(x)$ are polynomially coprime: for, otherwise, either there should exist integers ξ_1 and η_1 satisfying

$$(4.1) \quad 0 < \xi_1 \leq y, 0 < \eta_1 \leq c_1 \text{ and } \frac{\xi_1}{n} = \frac{\eta_1}{a_1}$$

or, there should exist integers ξ_2 and η_2 satisfying

$$(4.2) \quad 0 < \xi_2 \leq r, 0 < \eta_2 \leq z \text{ and } \frac{\xi_2}{n} = \frac{\eta_2}{a_1}.$$

Now (4.1) implies that $\frac{n}{(a_1, n)} \left| \xi_1 \right| \eta_1$ and consequently $\frac{n}{(a_1, n)} \leq \xi_1 \leq y$ and $\frac{a_1}{(a_1, n)} \leq \eta_1 \leq c_1$ which clearly contradicts (2.5). A similar argument shows that (4.2) contradicts (2.4). The lemma now follows by an application of the usual H.C.F. process to $A(x)$ and $B(x)$.

We shall take k to be the least of such positive integers and write

$$(4.3) \quad k = k_1 k_2$$

where k_2 is the largest divisor of k prime to n . (This is the number k_2 referred to in (3.5).)

Lemma II. Under the hypothesis of theorem I.

$$\prod_{i=1}^m (a_i x + c_i)! \mid (nx - r)! x k_1$$

for all sufficiently large x satisfying

$$(4.4) \quad nx \equiv r \pmod{k_2}.$$

(Obviously (4.3) implies the solvability of (4.4).)

Proof: Since by (1.4), (1.6), (3.9), and (3.10) we have

$$\sum_{i=1}^m (a_i x + c_i) = nx + y,$$

and

$$(nx + y)! = (nx - r - 1)! x A(x)$$

it follows by a well known result (vide theorem I of [1]) that

$$(4.5) \quad \prod_{i=1}^m (a_i x + c_i)! \mid (nx - r - 1)! x A(x)$$

for all $x > \frac{r+1}{n}$.

Similarly, observing that

$$a_1 x - z - 1 + \sum_{i=2}^m a_i x + c_i = nx - r - 1,$$

and

$$(a_1 x + c_1)! = (a_1 x - z - 1)! x B(x)$$

we have

$$(4.6) \quad \prod_{i=1}^m (a_i x + c_i)! \mid (nx - r - 1)! x B(x)$$

for all

$$(4.6a) \quad x > \text{Max} \left\{ \frac{r+1}{n}, \frac{z+1}{a_1} \right\}.$$

Now, (4.5), (4.6) and the lemma I imply that for all sufficiently large x ,

$$(4.7) \quad \prod_{i=1}^m (a_i x + c_i)! \mid (nx - r - 1)! x k_1 k_2.$$

Since

$$(nx - r)! x k_1 = (nx - r - 1)! x k_1 k_2 \frac{(nx - r)}{k_2}$$

the lemma follows from (4.7).

Lemma III. For each prime p dividing n ,

$$(a) \quad I(n x_i - r, p) = I(n X_1 - r, p) + \sum_{j=2}^i I(n X_j, p), \text{ and}$$

(b) for each i , $1 \leq i \leq m$,

$$I(a_i x_i + c_i, p) = I(a_i X_1 + c_i, p) + \sum_{j=2}^i I(a_i X_j, p).$$

Proof: Let $\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2; \dots; \lambda_t, \mu_t; \dots$ be the lowest and highest powers of the prime p that occurs in the expressions in the scale of p of

$$n X_1 - r, n X_2, \dots, n X_t.$$

Now, from (3.6) and (3.7) we have

$$p^{\mu_1} \leq n X_1 - r < n X_1 = n^{l_1} T < \pi^{l_1-1} \leq p^{l_1-1} < p^{l_1} \leq p^{\alpha_{l_1} T} = p^{\lambda_1}$$

and for $i > 1$,

$$p^{\mu_i} \leq n X_i = n^{l_i} T < \pi^{l_{i+1}-1} < \pi^{l_i+1} \leq p^{l_i+1} \leq p^{\alpha_{l_i+1} T} = p^{\lambda_{i+1}}$$

and hence

$$(4.8) \quad \mu_i < \lambda_{i+1} \text{ for } i \geq 1.$$

Also, it is well known that

$$(4.9) \quad I(N, p) = \frac{N - S}{p - 1}$$

where S is the sum of the digits of N in the scale of p . Now, if s, S_1, S_2, \dots, S_t , are the sums of the digits of

$$n x_i - r, n X_1 - r, n X_2, \dots, n X_t$$

in the scale of p , we have by (4.8)

$$(4.10) \quad s = S_1 + S_2 + \dots + S_t.$$

The first part of the lemma is clear from (3.7), (4.9), and (4.10). The proof of the second part is similar.

Lemma IV. For each prime p dividing n ,

$$I(n X_j, p) - \sum_{i=1}^m I(a_i X_j, p) \geq 1.$$

Proof: For convenience let us write α_j for $\alpha_{l_j} T$.

Case (1). Let $p | b_1$.

By (3.1) $p^\alpha \nmid a_i$ for at least one i and for that a_i , $\frac{a_i X_j}{p^{\alpha_j}}$ is non-integral.

Observing that $\frac{n X_j}{p^{\alpha_j}}$ is integral and that by (1.4),

$$\sum_{i=1}^m \frac{a_i X_j}{p^{\alpha_j}} = \frac{n X_j}{p^{\alpha_j}},$$

we have

$$(4.11) \quad \left[\frac{nX_j}{p^{\alpha_j}} \right] - \sum_{i=1}^m \left[\frac{a_i X_j}{p^{\alpha_j}} \right] \geq 1.$$

Case (2). Let $p \mid b_2$.

By (3.2) $p^\alpha \mid a_i$, for each i and hence $\frac{a_i X_j}{p^{\alpha_j}}$ is integral for each i and j .

Let A_{ij} be the principal remainder modulo $p^{\alpha(1+\mu)}$ of $\frac{a_i X_j}{p^{\alpha_j}}$.

We observe that: there is at least one i for which

$$(4.12) \quad A_{ij} \neq 0;$$

for, otherwise, would follow that

$$p^{\alpha+1} \mid (a_1, a_2, \dots, a_m)$$

contrary to (3.2).

Also

$$(4.13) \quad A_{ij} \neq 1,$$

for, otherwise, would follow that

$$(4.14) \quad \frac{a_i X_j}{p^{\alpha_j}} \cdot \frac{n}{p^\alpha} \equiv \frac{n}{p^\alpha} \pmod{p^{\alpha(1+\mu)}};$$

also, since $\varphi(p^{\alpha(1+\mu)}) \mid T$ and $\left(\frac{n}{p^\alpha}, p\right) = 1$, we have by EULER's theorem

$$(4.15) \quad \frac{nX_j}{p^{\alpha_j}} = \left(\frac{n}{p^\alpha}\right)^{l_j T} \equiv 1 \pmod{p^{\alpha(1+\mu)}}.$$

Now, from (4.14) and (4.15) would follow that

$$\frac{a_i}{p^\alpha} \equiv \frac{n}{p^\alpha} \pmod{p^{\alpha(1+\mu)}}$$

which by (3.4) contradicts (1.3) and (1.4) taken together.

Observing by (1.4) that

$$\sum_{i=1}^m \frac{a_i X_j}{p^{\alpha_j + \alpha(1+\mu)}} = \frac{nX_j}{p^{\alpha_j + \alpha(1+\mu)}}$$

we have by (4.12), (4.13), and (4.15) that

$$(4.16) \quad \left[\frac{nX_j}{p^{\alpha_j + \alpha(1+\mu)}} \right] - \sum_{i=1}^m \left[\frac{a_i X_j}{p^{\alpha_j + \alpha(1+\mu)}} \right] \geq 1.$$

Now, from (4.11) and (4.16) the lemma is clear.

Proof of theorem I. By (3.7), (4.3), the definition of T , and EULER's theorem follows that $nX_j \equiv 1 \pmod{k_2}$ for all j and so again by (3.7), we have that for all $t \equiv r \pmod{k_2}$,

$$nx_i \equiv t \equiv r \pmod{k_2}.$$

Therefore, by lemma II follows that for all x_i satisfying (4.6a), and $t \equiv r \pmod{k_2}$,

$$(4.17) \quad \prod_{i=1}^m (a_i x_i + c_i)! \mid (nx_i - r)! x k_1.$$

Lemmas III and IV give that

$$(4.18) \quad \begin{aligned} I(nx_t - r, p) - \sum_{i=1}^m I(a_i x_t + c_i, p) &\geq \\ &\geq t - 1 + I(nX_1 - r, p) - \sum_{i=1}^m I(a_i X_1 + c_i, p). \end{aligned}$$

Since the R.H.S. of (4.18) tends to $+\infty$ as t tends to $+\infty$, and by (4.3) k_1 consists only of primes in n , the theorem follows from (4.17) and (4.18).

§ 5. Further notation and a lemma

Throughout the following, for any prime p , $R_j(x, p)$ denotes the principal remainder of x modulo p^j for

$$(5.1) \quad j > 0,$$

and $\lambda(x, p)$ denotes the highest power of p , in the expression of

$$(5.2) \quad x \text{ in the scale of } p.$$

We now prove a lemma as an ancillary to theorem II.

Lemma: If (x) a prime p is $\leq n+1$,

$$(\beta) \quad x > (n+1) \frac{2 \log n}{\log 2} + 1,$$

and

$$(\gamma) \quad n > 2, \text{ then}$$

$$(5.3) \quad \left[\frac{nx}{p^{\lambda(x,p)+1}} \right] - \left[\frac{x+n}{p^{\lambda(x,p)+1}} \right] \geq \left[\frac{n}{p} \right],$$

and

$$(5.4) \quad \left[\frac{x+n}{p^j} \right] = 0 \text{ for all } j > \lambda(x, p) + 1.$$

Proof: Under the conditions of the lemma

$$(5.5) \quad p^{\lambda(x,p)} > n^2,$$

and

$$(5.6) \quad 2p^{\lambda(x,p)+1} > x+n, \text{ (in virtue of (5.2)).}$$

Suppose $\frac{x+n}{p^{\lambda(x,p)+1}} \geq 1$.

Then would follow that

$$(5.7) \quad \frac{nx}{p^{\lambda(x,p)+1}} - \frac{n}{p} \geq n - \frac{n^2}{p^{\lambda(x,p)+1}} - \frac{n}{p} \geq 1,$$

by (5.5).

Now, (5.6) implies (5.4) and (5.7) implies (5.3). Hence the lemma. Corollary: (5.3) and (5.4) obviously imply that

$$(5.8) \quad \left[\frac{nx}{p^{\lambda(x,p)+1}} \right] - \left[\frac{x+n-1}{p^{\lambda(x,p)+1}} \right] \geq \left[\frac{n}{p} \right]$$

and

$$(5.9) \quad \left[\frac{x+n-1}{p^j} \right] = 0 \text{ for all } j > \lambda(x, p) + 1.$$

Proof of theorem II. (a) For $x = 1 + 2^j$, a simple calculation would show that

$$I(2x-1, 2) - I(x, 2) - I(x+1, 2) = -1$$

for all positive integral j .

Hence it follows that for such x , $\frac{(2x-1)!x}{x!(x+1)!}$ must have a power of 2 in its denominator in its expression in lowest terms. Hence (a).

(b) For any prime p dividing $n+1$ and $x = p^j$ where $j > \frac{\log(n+1)}{\log p}$ again a simple calculation would show that

$$I(nx, p) - (n-1)I(x, p) - I(x+n+1, p) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right] - \left[\frac{n+1}{p^j} \right] \leq -1$$

which proves that for such x and p , $\frac{nx!}{(x!)^{n-1}(x+n+1)!}$ must have a power of p in its denominator in its expression in lowest terms. Hence (b).

(c) If $n = 2$, the result follows from the facts

$$\frac{(2x+1)!}{x!(x+1)!}$$

is $I \rightarrow S$, and $(2x+1, x+1) = 1$.

Suppose

$$(5.10) \quad n > 2.$$

By (5.1) and (5.2) we have for any prime p ,

$$(5.11) \quad \begin{aligned} & I(nx, p) - (n-1)I(x, p) - I(x+n-1, p) \\ &= \sum_{j=1}^{\lambda(x, p)} \left[\frac{nR_j(x, p)}{p^j} \right] - \left[\frac{R_j(x, p) + n-1}{p^j} \right] + \sum_{j=\lambda(x, p)+1}^{\infty} \left[\frac{nx}{p^j} \right] - \left[\frac{x+n-1}{p^j} \right]. \end{aligned}$$

It is not difficult to see that (5.11) is $\geq -\sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n-1}{p^j} \right]$

and so if

$$(5.12) \quad p > n-1, \quad (5.11) \geq 0.$$

Suppose

$$(5.13) \quad p \leq n-1.$$

In virtue of (5.10), (5.13) and the cor. to the lemma, we have, for all x satisfying (β),

$$\sum_{j=\lambda(x, p)+1}^{\infty} \left[\frac{nx}{p^j} \right] - \left[\frac{x+n-1}{p^j} \right] \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right].$$

Hence observing that

$$\sum_{j=1}^{\lambda(x,p)} \left[\frac{n R_j(x,p)}{p^j} \right] - \left[\frac{R_j(x,p) + n - 1}{p^j} \right] \geq - \sum_{j=1}^{\lambda(x,p)} \left[\frac{n-1}{p^j} \right]$$

we get (5.11) ≥ 0 for all x satisfying (β) .

This together with (5.11) proves (c).

(d) For any prime p dividing $n+1$, and for $x = 1 + p^j$ where $j > \frac{\log(n+1)}{\log p}$, direct calculation of

$$I(nx, p) - (n-1) I(x, p) - I(x+n, p)$$

would show that it is

$$= 2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right] \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n+1}{p^j} \right]$$

and this is seen to be ≤ -1 in virtue of the hypothesis.

(e) By hypothesis follows that

$$(5.14) \quad n > 2.$$

By (5.1) and (5.2), we have for any prime p

$$(5.15) \quad I(nx, p) - (n-1) I(x, p) - I(x+n, p) = \sum_{j=1}^{\lambda(x,p)} \left[\frac{n R_j(x,p)}{p^j} \right] - \left[\frac{R_j(x,p) + n}{p^j} \right] + \sum_{j=\lambda(x,p)+1}^{\infty} \left[\frac{nx}{p^j} \right] - \left[\frac{x+n-1}{p^j} \right].$$

It is easy to see that if either $p > n+1$ or $R_1(x, p) > 1$, then

$$(5.16) \quad (5.15) \geq 0.$$

Suppose that

$$(5.17) \quad R_1(x, p) \leq 1 \text{ and } p \leq n+1.$$

Case (1). Let $R_1(x, p)$ be zero.

Then every $R_j(x, p)$ is either zero or > 1 and so,

$$\sum_{j=1}^{\lambda(x,p)} \left[\frac{n R_j(x,p)}{p^j} \right] - \left[\frac{R_j(x,p) + n}{p^j} \right] \geq - \sum_{j=1}^{\lambda(x,p)} \left[\frac{n}{p^j} \right]$$

and also in virtue of (5.14) and (5.17) and the lemma follows that for all x satisfying (β) ,

$$\sum_{j=\lambda(x,p)+1}^{\infty} \left[\frac{nx}{p^j} \right] - \left[\frac{x+n}{p^j} \right] \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right].$$

Hence (5.15) ≥ 0 , under the conditions of the lemma.

Case (2). Let $R_1(x, p) = 1$. Then $R_j(x, p) \geq 1$ for every j . So

$$\sum_{j=1}^{\lambda(x,p)} \left[\frac{n R_j(x,p)}{p^j} \right] - \left[\frac{R_j(x,p) + n}{p^j} \right] \geq \sum_{j=1}^{\lambda(x,p)} \left[\frac{n}{p^j} \right] - \left[\frac{n+1}{p^j} \right]$$

and this is

$$(5.18) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right] - \left[\frac{n+1}{p^j} \right]$$

(See the proof of the lemma) for all x satisfying (β) .

Again in virtue of (5.14), (5.17) and the lemma, we get for all x satisfying (β) ,

$$(5.19) \quad \sum_{j=\lambda(x,p)+1}^{\infty} \left[\frac{nR_j(x,p)}{p^j} \right] - \left[\frac{R_j(x,p)+n}{p^j} \right] \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right].$$

(5.18) and (5.19) prove that (5.15)

$$\geq \left(2 \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right] \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n+1}{p^j} \right]$$

for all x satisfying (β) and a simple verification shows that this is non-negative if and only if $n+1$ is not a prime and $n \neq 3$.

Now (5.16), case (1) and case (2) together prove (e).

We thank Prof. V. RAMASWAMI for his help in the preparation of this paper by way of suggestions and criticisms. Our thanks are also due to Prof. MORDELL, whose suggestions led to improved presentation.

References

- [1] MORDELL, L. J.: Integer quotients of products of factorials. J. London Math. Soc. **34**, part II, 134—138 (1959).
- [2] WRIGHT, E. M.: A generalisation of a result of Mordell. J. London Math. Soc. **33**, part IV, 476—478 (1958).
- [3] McANDREW, M. H.: Note on a problem of Erdős. Proc. Camb. Phil. Soc. **55**, 210—212 (1959).

(Received July 1, 1960)

Bemerkungen zur Inhaltslehre der ebenen hyperbolischen Geometrie

Von

OTT-HEINRICH KELLER und GERHARD LIEBOLD in Halle

M. DEHN [2] hat die Inhaltslehre in der ebenen elliptischen Geometrie untersucht und dabei bewiesen, daß Dreiecke mit gleicher Winkelsumme einander „zerlegungsgleich“ sind, d. h. sich in endlich viele kongruente Teildreiecke zerlegen lassen, die nur in verschiedener Weise aneinandergesetzt sind. Er hat damit die Inhaltslehre der elliptischen Geometrie ohne Rückgriff auf die Stetigkeit begründet. Er hat angedeutet, daß man mit ähnlichen Methoden auch in der hyperbolischen Geometrie zum Ziele kommen müsse. A. FINZEL [3] hat dann die entsprechenden Überlegungen in der absoluten Geometrie durchgeführt. Sein Ansatz läßt nur die Betrachtung von Figuren mit lauter eigentlichen Eckpunkten zu. Nun schienen uns in der hyperbolischen Geometrie aber auch und gerade die Dreiecke interessant zu sein, von denen einige Eckpunkte im Unendlichen liegen; ja sie erscheinen geradezu als Normalformen geeignet, ähnlich wie die einfach und doppelt rechtwinkligen Dreiecke in der elliptischen Geometrie in der Arbeit von DEHN. Dies sei im folgenden durchgeführt.

§ 1. Axiome und Definitionen

Wir legen folgende *Axiome* zugrunde:

1. Der Körper, dem wir die auftretenden Zahlgrößen entnehmen, ist kommutativ und geordnet.

2. Es gelten die Axiome der Verknüpfung, Anordnung, Kongruenz, wie sie etwa bei D. HILBERT [5] formuliert sind.

3. Es gibt ein Dreieck, dessen Winkelsumme kleiner ist als zwei rechte. Bekanntlich trifft dies dann für jedes weitere zu.

M. DEHN [1] hat bewiesen, daß man durch Einfügung idealer Elemente die Ebene so abschließen kann, daß je zwei Geraden sich in einem Punkte schneiden. Nun verlangen wir als viertes Axiom

4. Auf einer Geraden g gebe es einen idealen Punkt O , der bei allen Verschiebungen längs g fest bleibt. Ein solcher Punkt heiße ein Fernpunkt.

Daraus und aus der freien Beweglichkeit folgt, daß es auf jeder Geraden nach beiden Seiten hin einen Fernpunkt gibt; aus 3. folgt, daß diese beiden Punkte immer verschieden sind. Die Gesamtheit dieser Punkte erfüllt das fundamentale Gebilde.

Über Stetigkeit sei nichts vorausgesetzt. Aus dem Vollständigkeitsaxiom würde 4. sofort folgen.

Nun definiert man in der bekannten Weise.

1. Ein Dreieck heiße asymptotisch, wenn ein oder mehrere Ecken Fernpunkte sind.

2. Das Inhaltsmaß eines Dreiecks sei die Differenz zwischen der Winkelsumme und zwei Rechten. FINZEL hat gezeigt, daß das Inhaltsmaß einer aus Dreiecken zusammengesetzten Figur gleich der Summe der Inhaltsmae der einzelnen Teile ist.

3. Zwei Polygone $P_1 P_2$ heißen zerlegungsgleich, $P_1 \stackrel{z}{=} P_2$, wenn sie sich in paarweise kongruente Dreiecke zerlegen lassen, die sich nur durch ihre gegenseitige Lagerung unterscheiden.

4. Zwei Polygone P_1 und P_2 heißen ergänzungsgleich, $P_1 \stackrel{e}{=} P_2$, wenn sie nach Hinzufugung zerlegungsgleicher Polygone selbst zerlegungsgleich werden.

Das Ziel unserer Überlegung soll sein, daß Dreiecke mit gleichem Inhaltsmaß stets ergänzungsgleich sind (zerlegungsgleich sind sie im allgemeinen nicht).

§ 2. Das Axiom 4

Wir wollen uns zunächst davon überzeugen, daß das Axiom 4 von den übrigen unabhängig ist. Dazu konstruieren wir die folgende Geometrie, in der es nicht gilt: Wir gehen aus von dem Körper $K(t)$ der Potenzreihen einer unbestimmten t mit dem Körper K aller reellen Zahlen als Koeffizientenkrper (vgl. etwa HESSENBERG-SCHWAN [4], S. 134). Nennen wir eine Potenzreihe positiv, wenn der erste nicht verschwindende Koeffizient positiv ist, so ist damit $K(t)$ geordnet. In $K(t)$ läßt sich aus der Summe zweier Quadrate und aus $1 + a$ stets die Wurzel ziehen, wenn in der Potenzreihe a nur positive Potenzen von t wirklich vorkommen. Wir betrachten eine affine Ebene, in der die Koordinaten x, y der Punkte und die Koeffizienten der Geradengleichungen dem Körper $K(t)$ entnommen sind. Wir machen $x^2 + y^2 = t$ zum fundamentalen Kegelschnitt einer hyperbolischen Geometrie. Die Verschiebungen auf der x -Achse sind dann durch

$$V: x' = \frac{x + at}{ax + 1}, y' = \frac{\sqrt{1 - a^2 t} y}{ax + 1}$$

gegeben, wo in a keine negative Potenz von t vorkommt. Die Drehungen um den Nullpunkt sind von der Form:

$$D: x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} y$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} y.$$

Die Gesamtheit aller V und aller D erzeugt die volle Bewegungsgruppe und ist fur Punkte und Geraden transitiv. Alle Koeffizienten liegen in $K(t)$.

Wir haben also eine hyperbolische Geometrie aufgebaut, in der die Axiome 1, 2, 3 gelten; Fernpunkte gibt es jedoch in unserer Geometrie nicht, da sich aus t die Wurzel nicht ziehen läßt.

Wir können aber jede hyperbolische Geometrie durch Einführung idealer Elemente so erweitern, daß sie eigentliche Fernpunkte besitzt. Dazu wählen wir einen Punkt O und definieren von ihm aus nach DEHN [1] Pseudoparallele, Pseudogleichheit und führen ein Pseudokoordinatensystem mit O als Ursprung ein. Die hyperbolischen Verschiebungen längs der x -Achse stellen sich dann als projektive Transformationen in den Pseudokoordinaten dar. Da nach DEHN die Strecken auf Geraden durch O bei Verschiebung von O weg pseudokleiner werden, sind diese Projektivitäten hyperbolisch. Die Bestimmung ihrer Fixpunkte führt auf quadratische Gleichungen mit positiver Diskriminante d . Wir adjungieren \sqrt{d} und können \sqrt{d} in die Reihe schon vorhandener Zahlen einordnen. Dann hat die Projektivität zwei Fixpunkte; in der hyperbolischen Ebene erweisen sie sich als Fernpunkte.

§ 3. Durchführung

Wir wollen zunächst aus den Axiomen einige Folgerungen ziehen.

1. Jedes einfach-asymptotische Dreieck OA_1A_2 ist einem doppel-asymptotischen zerlegungsgleich (Fig. 1).

Wir halbieren A_1A_2 in C und verbinden O mit C . Der andere Fernpunkt von OC sei O_1 . Dann sind $\triangle OA_1A_2$ und $\triangle OA_1O_1$ zerlegungsgleich. Denn $\triangle O_1CA_1$

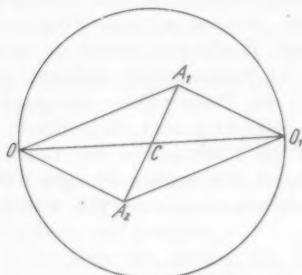


Fig. 1

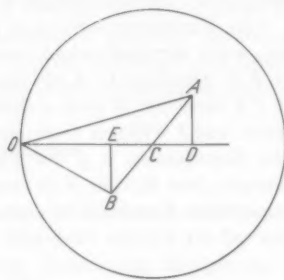


Fig. 2

geht aus $\triangle OCA_2$ durch Drehung um C hervor und ist mit ihm kongruent. Durch Addition zu $\triangle OCA_1$ folgt dann die Behauptung.

2. Es sei OAB ein einfach-asymptotisches Dreieck, C die Mitte von AB . Verschiebt man nun A und B um verschiedene Stücke durch Verschiebungen längs OC , so entstehen immer wieder Dreiecke, die dem gegebenen zerlegungsgleich sind (Fig. 2).

Zum Beweis fallen wir von A und B die Lote AD und BE auf OC . Es ist $\triangle ACD \cong \triangle BCE$, denn diese beiden Dreiecke gehen durch eine Drehung um C um zwei Rechte auseinander hervor. Durch geeignete Addition und Subtraktion dieser Dreiecke sieht man, daß $\triangle OAB \cong \triangle OAD + \triangle OBE$. Damit ist das ursprüngliche Dreieck in zwei voneinander unabhängige Stücke zu beiden Seiten von OC zerlegt, die nach Belieben in verschiedener Weise längs OC

verschoben werden können. Nachher kann man dann die oben angegebene Konstruktion wieder rückgängig machen und die beiden Stücke zu einem einzigen Dreieck wieder zusammensetzen.

3. Es sei ABC ein endliches Dreieck, O derjenige Fernpunkt auf AB , der durch A von B getrennt wird, M und N die Mitten von AC und BC . Die Gerade ON schneidet nach dem Axiom von Pasch die Strecke AC in einem Punkt P . Wir wollen uns überzeugen, daß P zwischen M und A liegt (Fig. 3).

Die Lote AR und BQ von A und B auf MN sind gleich lang, wie FINZEL [3] durch Vergleich mit dem Lot von C auf MN und Betrachtung kongruenter Dreiecke gezeigt hat. Also geht AB bei der Spiegelung um das

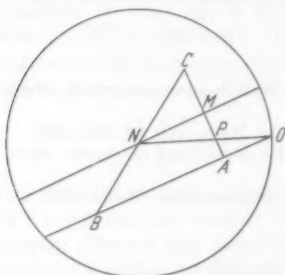


Fig. 3

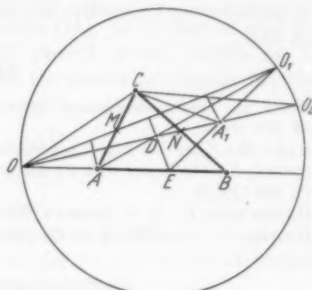


Fig. 4

Mittellot von RQ in sich über; AB und MN haben ein gemeinsames Lot und schneiden sich nicht. Angenommen nun, MN schnitte die Strecke AP . Dann müßte MN nach dem Axiom von Pasch auch OA oder OP schneiden, was beides nicht möglich ist.

4. Satz: Jedes endliche Dreieck ABC ist einem einfach asymptotischen Dreieck ergänzungsgleich (Fig. 4).

O sei wieder derjenige Fernpunkt von AB , der von B durch A getrennt ist. Es ist $\angle ABC = \angle OBC - \angle OAC$. M und N seien wieder die Mitten von AC und BC . Es seien O_1 und O_2 die anderen Fernpunkte von OM und ON . Nach 2. ist dann $\angle OBC = \angle OCO_2$.

Nun verschieben wir A durch eine Verschiebung durch OM in einen Punkt A_1 auf ON . Dies ist möglich, weil nach Punkt 4. A und ON auf derselben Seite von OM liegen. Den Punkt A_1 finden wir in folgender Weise: Die Verbindungslinie AO_1 schneide ONO_2 in D . Nach dem Axiom von Pasch, angewandt auf das Dreieck AMO_1 , ist D ein eigentlicher Punkt. Wir fällen von D das Lot auf OMO_1 ; es schneide OAB in einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkte E . Die Verbindungslinie O_1E schneidet ONO_2 in dem gesuchten Punkt A_1 . Denn bei der Spiegelung an ED geht OMO_1 in sich, OD in O_1D , OE in O_1E und daher A in A_1 über. Deshalb ist A_1 ein eigentlicher Punkt. Weiter haben A und A_1 den gleichen senkrechten Abstand von OMO_1 . Es gibt also eine Verschiebung

längs OMO_1 , die A in A_1 überführt. Jetzt ist

$$\triangle OBC \stackrel{z}{=} \triangle OCO_2$$

$$\triangle OAC \stackrel{z}{=} \triangle OCA_1$$

also

$$\triangle ABC \stackrel{z}{=} \triangle CO_2A_1.$$

Wir können also jedes endliche Dreieck in ein einfach-asymptotisches ergänzungsgleiches und jedes solche in ein zweifach-asymptotisches zerlegungsgleiches verwandeln. Zwei zweifach asymptotische Dreiecke mit gleichen Winkeln in ihrem eigentlichen Punkt sind kongruent, zwei solche mit verschiedenen Winkeln haben verschiedenes Inhaltsmaß. Daraus folgt, daß Dreiecke der hyperbolischen Geometrie mit demselben Inhaltsmaß einander ergänzungsgleich sind.

Literatur

- [1] DEHN, M.: Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Math. Ann. **53**, 404 (1900).
- [2] DEHN, M.: Über den Inhalt sphärischer Dreiecke. Math. Ann. **60**, 166 (1905).
- [3] FINZEL, A.: Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie. Math. Ann. **72**, 266 (1912).
- [4] HESSENBERG, G., u. G. SCHWAN: Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930.
- [5] HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie.

(Eingegangen am 18. Mai 1960)

On Some Theorems of Hardy, Littlewood and Titchmarsh

By

P. L. BUTZER in Aachen

§ 1. Introduction

A number of years ago E. C. TITCHMARSH [14], G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD [11, p. 599—601], [12, p. 619] proved several results on Lipschitz classes in the L_p -metric. We shall state the results for periodic functions.

Theorem (TITCHMARSH): Let $f \in L_p(-\pi, \pi)$, $p \geq 1$. If

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p} = o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

then $f(x)$ is almost everywhere equal to a constant.

For a proof, one may consult [18, I. p. 45] or [1, p. 164].

Theorem (HARDY and LITTLEWOOD): a) Let $f \in L_1(-\pi, \pi)$. A necessary and sufficient condition for a periodic function f to satisfy

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)| dx = O(h) \quad (h \rightarrow 0),$$

is that f should coincide almost everywhere with a function of bounded variation.

b) Let $f \in L_p(-\pi, \pi)$, $p > 1$. A necessary and sufficient condition for f to satisfy

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p} = O(h) \quad (h \rightarrow 0),$$

is that f should be equivalent to the integral of a function in $L_p(-\pi, \pi)$.

For the proofs, one may also consult [18, I. p. 180]. The preceding theorems, which have been stated for periodic functions, also hold for functions defined over any finite interval (a, b) if one sets $f(x) = 0$, say, outside (a, b) (see [15, p. 372]).

It is the aim of this note to generalize the above theorems to functions f defined over the infinite interval $(-\infty, \infty)$ with $f \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$. The methods of proof will be based upon the Fourier transform method developed by the author in [4], [5], [6] and [7]. This method is very different to the initial methods used by HARDY, LITTLEWOOD and TITCHMARSH in the case of functions defined over a finite interval. The present method also enables one to generalize the results to higher central and forward differences. Thus, the results of this note reveal the strength and wide applicability of the Fourier transform method.

In the succeeding proofs, the following result due to H. CRAMÉR [9] is of importance.

Theorem (CRAMÉR): Let $h(v)$ be a continuous function of the real variable v , integrable over every finite interval. A necessary and sufficient condition such that $h(v)$ admits a representation as a Fourier-Stieltjes transform

$$h(v) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} dg(x) \quad (-\infty < v < \infty),$$

in notation $h(v) = \mathfrak{F}\mathfrak{S}[g(x)] = \check{g}(v)$, where g is of bounded variation in $(-\infty, \infty)$, is that

$$\left\| (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) e^{ivx} h(v) dv \right\|_{L_1} = O(1),$$

for all $0 < R < \infty$.

Here

$$\|f\|_{L_p} = \left\{ (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

In § 4, an extension of the latter theorem to L_p -functions will also be needed. For this one may consult [6, Lemma 2.3].

§ 2. The Theorem of Titchmarsh

We are concerned here with theorems of the Titchmarsh-type.

Theorem 2.1: Let $f \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$. If

$$(2.1) \quad \|f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)\|_{L_p} = o(h^2) \quad (h \rightarrow 0),$$

then f is equal to the null-function in $(-\infty, \infty)$.

Proof: We consider first the case $p = 1$, and denote the Fourier transform of f by

$$(2.2) \quad \mathfrak{F}[f] = \hat{f}, \hat{f}(v) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ivx} dx.$$

Since $\mathfrak{F}[f(x+2h)] = e^{2ivh} \hat{f}(v)$, we have

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)] &= [e^{2ivh} + e^{-2ivh} - 2] \hat{f}(v) \\ &= [2 \cos 2vh - 2] \hat{f}(v). \end{aligned}$$

Thus

$$|2(\cos 2vh - 1) \hat{f}(v)| \leq (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)| dx,$$

and according to (2.1) it follows that

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(2h)^2} 2(\cos 2vh - 1) \hat{f}(v) = 0.$$

Hence $(-1)v^2 \hat{f}(v) = 0$ for all v and the uniqueness theorem for Fourier transforms gives the desired conclusion.

In the case $f \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leq 2$, we have to recall several known facts. We put

$$f_\omega(v) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ivx} dx, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Then, as $\omega \uparrow \infty$, $f_\omega(v)$ converges in L_q to a function $f(v)$, the Fourier transform of $f(x)$, satisfying the inequality (see [16, p. 96]):

$$(2.3) \quad \|f\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_p}.$$

We now employ these results. Noting again that

$$\mathfrak{F}[f(x+2h)] = e^{2ivh} f(v) \quad (\text{see [16, p. 90 Theorem 64]}),$$

we proceed as in the previous case and then use (2.3) to deduce that

$$\begin{aligned} & \left\{ (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} |(2 \cos 2vh - 2) f(v)|^q dv \right\}^{1/q} \leq \\ & \leq \left\{ (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

According to (2.1) it then follows that

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(2h)^p} \|(2 \cos 2vh - 2) f(v)\|_{L_q} = 0,$$

and by FATOU's lemma we obtain that $\|(-1)v^2 f(v)\|_{L_q} = 0$, and thus $v^2 f(v) = 0$ for almost all v giving in view of the uniqueness theorem, that $f(x)$ is the null function.

Theorem 2.2: Let $f \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$. If

$$(2.4) \quad \|f(x+h) - f(x)\|_{L_p} = o(h) \quad (h \rightarrow 0),$$

then f is equal to the null-function in $(-\infty, \infty)$.

Proof: As the proof is rather similar to the proceeding one we just sketch those points that are different. Here

$$\mathfrak{F}[f(x+h) - f(x)] = (e^{ivh} - 1) f(v)$$

and (2.4) gives

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1/h) \|(e^{ivh} - 1) f(v)\| = 0.$$

Thus $ivf(v) = 0$ for all v , which again proves the result in case $p = 1$. In case $1 < p \leq 2$, we have according to (2.3) and (2.4)

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1/h) \|(e^{ivh} - 1) f(v)\|_{L_q} = 0,$$

giving, by FATOU's lemma, $ivf(v) = 0$ for almost all v . This completes the proof.

We may mention that one can give a proof of the original version of the Titchmarsh theorem, i. e. for periodic functions, if one uses the Fourier coefficients as the transform in the proof above.

§ 3. The Theorem of Hardy and Littlewood: case $p = 1$

We first establish the theorem for the central differences of order 2.

Theorem 3.1: *Let $f \in L_1(-\infty, \infty)$. The following statements are equivalent:*

1. $\|f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)\|_{L_1} = O(h^2) \quad (h \rightarrow 0);$
2. *there is a function g of bounded variation on $(-\infty, \infty)$ so that $\tilde{g}(v) = (-1)v^2 f(v)$, all v .*

Proof: 1. \Rightarrow 2.: We consider the partial integrals

$$(3.1) \quad S_w(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-w}^w (2 \cos 2vh - 2) f(v) e^{ivx} dv \quad (0 < w < \infty)$$

which can be written as

$$S_w(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-w}^w e^{ivx} dv (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} [f(u+2h) + f(u-2h) - 2f(u)] e^{-ivx} du$$

and an interchange of the order of integration gives

$$(3.2) \quad S_w(x) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} [f(u+2h) + f(u-2h) - 2f(u)] \frac{\sin w(x-u)}{x-u} du.$$

The FEJÉR means of the $S_w(x)$ are

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_R(x) &= (1/R) \int_0^R S_w(x) dw \\ &= (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) (2 \cos 2vh - 2) f(v) e^{ivx} dv. \end{aligned}$$

If we apply (3.2) and interchange the order of integration, these means may be written as

$$(3.4) \quad \sigma_R(x) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} [f(u+2h) + f(u-2h) - 2f(u)] \frac{2 \sin^2 R(x-u)/2}{R(x-u)^2} du.$$

According to known results and the hypothesis 1., it follows that

$$(3.5) \quad \|\sigma_R(x)\|_{L_1} \leq \|f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)\|_{L_1} = O(h^2),$$

yielding by (3.3)

$$(3.6) \quad \left\| (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) (2 \cos 2vh - 2) f(v) e^{ivx} dv \right\|_{L_1} = O(h^2),$$

where the large- O term is independent of R and h .

On the other hand, there exists a constant $M > 0$ such that

$$|(1/(2h^2)) (2 \cos 2vh - 2)| \leq M v^2, \quad (|h| \leq h_0; |v| \leq R),$$

and thus

$$\left| \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) \frac{1}{(2h)^2} [2 \cos 2vh - 2] f(v) e^{ivx} \right| \leq 2M v^2 |f(v)|$$

¹⁾ In a paper to appear, J. L. B. COOPER has shown that the statement 2. is equivalent to: 3. there is a function g of bounded variation on $(-\infty, \infty)$ such that for almost all x

$$f(x) = - \int_x^\infty dy \int_y^\infty dg(u).$$

for $|h| \leq h_0$, $|v| \leq R$ every $R > 0$. The right hand side of the latter inequality being integrable over every finite interval $|v| \leq R$, LEBESGUE's dominated convergence theorem gives

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) \frac{1}{(2h)^2} [2 \cos 2vh - 2] f(v) e^{ivx} dv \\ = \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) (-1) v^2 f(v) e^{ivx} dv. \end{aligned}$$

By FATOU's lemma, we then obtain

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) (-1) v^2 f(v) e^{ivx} dv \right| dx \\ \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(2h)^2} \int_{-\infty}^{\infty} (1/\sqrt{2\pi}) \left| \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) [2 \cos 2vh - 2] f(v) e^{ivx} dv \right| dx \end{aligned}$$

which is finite according to (3.6). Thus

$$(3.7) \quad \left\| (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) (-1) v^2 f(v) e^{ivx} dv \right\|_{L_1} = O(1),$$

the large- O being independent of R . We finally apply the Cramér Theorem to the continuous function $h(v) = (-1) v^2 f(v)$ and deduce that $(-1) v^2 f(v) = \check{g}(v)$, all v .

2. \Rightarrow 1.: According to integral transform tables (e. g. [10, p. 20]) one may write

$$\frac{2[\cos 2vh - 1]}{(2vh)^2} = \check{\psi}(2vh) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ivhx} d\psi(x),$$

where

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \alpha(u) du, \quad \alpha(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}(x-1), & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases},$$

ψ being of bounded variation on $(-\infty, \infty)$.

Since $\check{g}(v) = -v^2 f(v)$, all v , we obtain

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \frac{2}{(2h)^2} [2 \cos 2vh - 1] (-1) f(v) &= \frac{2}{(2hv)^2} [\cos 2vh - 1] \check{g}(v) \\ &= \check{g}(v) \check{\psi}(2vh), \text{ all } v. \end{aligned}$$

Applying a theorem on the product of two Fourier-Stieltjes transforms (compare D. V. WIDDER [17], p. 251–255) it follows that

$$\check{g}(v) \check{\psi}(2vh) = \check{\varphi}_{2h}(v)$$

where

$$\check{\varphi}_{2h}(v) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} d\varphi_{2h}(x), \quad \varphi_{2h}(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u) d\psi\left(\frac{u}{2h}\right),$$

and

$$[\text{Var } \varphi_{2h}(x)]_{-\infty}^{\infty} \leq (1/\sqrt{2\pi}) [\text{Var } g(x)]_{-\infty}^{\infty} \left[\text{Var } \psi\left(\frac{x}{2h}\right) \right]_{-\infty}^{\infty}.$$

Since g is of bounded variation on $(-\infty, \infty)$ the first term of the product on the right hand side is bounded by M_1 , say. Since ψ is also of bounded variation on $(-\infty, \infty)$, the second term of the product is bounded by M_2 , say. This M_2 is independent of h , for if x ranges through $(-\infty, \infty)$, so does $x/2h$. Thus

$$[\text{Var } \varphi_{2h}(x)]_{-\infty}^{\infty} \leq (1/\sqrt{2\pi}) M_1 M_2 = M,$$

M being independent of h . It follows that

$$(1/(2h)^2) \mathfrak{F}[f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)] = (-1) \check{\varphi}_{2h}(v) = (-1) \mathfrak{F} \mathfrak{G}[\varphi_{2h}(x)].$$

The uniqueness theorem then gives

$$\varphi_{2h}(x) = \frac{(-1)}{(2h)^2} \int_{-\infty}^x [f(u+2h) + f(u-2h) - 2f(u)] du$$

and so

$$[\text{Var } \varphi_{2h}(x)]_{-\infty}^{\infty} = (2h)^{-2} \sqrt{2\pi} \|f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)\|_{L_1} \leq M,$$

establishing the theorem.

The method of proof is a prototype of those that are to follow and thus has been carried out in detail. The method is essentially related to that of BUTZER [6, Theorems 4.1 and 5.1]. It may be remarked that a method of proof in BUTZER and KÖNIG [8] could also be used. But the latter method is restricted to L_1 -functions and so will not give the results in § 4 below. For the forward differences of order 1 we have:

Theorem 3.2: Let $f \in L_1(-\infty, \infty)$. The subsequent statements are equivalent:

1. $\|f(x+h) - f(x)\|_{L_1} = O(h) \quad (h \rightarrow 0);$
2. there is a function g of bounded variation on $(-\infty, \infty)$ such that $\check{g}(v) = i v f(v)$, all v .

Proof. The proof being rather similar to the above, we just indicate the main steps.

1. \Rightarrow 2.: We here start off with the partial integrals

$$S_w(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-w}^w (e^{i v h} - 1) f(v) e^{i v x} dv,$$

and the Fejér means

$$\sigma_R(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) (e^{i v h} - 1) f(v) e^{i v x} dv,$$

obtaining

$$\|\sigma_R(x)\|_{L_1} \leq \|f(x+h) - f(x)\|_{L_1} = O(h).$$

Following the method of the above proof, we get to the stage that

$$\left\| \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R} \right) i v f(v) e^{i v x} dv \right) \right\|_{L_1} = O(1),$$

the large- O being independent of R . Applying the Cramér Theorem, 2. follows.

2. \Rightarrow 1.: It is obvious that we may write

$$\frac{e^{i v h} - 1}{i v h} = \tilde{\psi}(v h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i v h x} d\psi(x)$$

where

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \gamma(u) du, \quad \gamma(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}, & -1 < x < 0 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ψ being of bounded variation in $(-\infty, \infty)$ and $\psi(-\infty) = 0$, $\psi(\infty) = \sqrt{2\pi}$. It follows that

$$\frac{(e^{i v h} - 1)}{h} f(v) = \frac{(e^{i v h} - 1)}{i v h} \tilde{g}(v) = \tilde{g}(v) \tilde{\psi}(v h),$$

and proceeding as in the above proof and introducing the function $\varphi_h(x)$, we have

$$[\text{Var } \varphi_h(x)]_{-\infty}^{\infty} = h^{-1} \sqrt{2\pi} \|f(x+h) - f(x)\|_{L_1} \leq M,$$

where M is independent of h . The proof is complete.

§ 4. The case $1 < p \leq 2$

This section is devoted to extensions of the previous results to L_p -functions.

Theorem 4.1: Let $f \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leq 2$. The following three statements are equivalent:

1. $\|f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)\|_{L_p} = O(h^2) \quad (h \rightarrow 0);$
2. there is a function $g \in L_p(-\infty, \infty)$ such that for almost all v

$$(4.1) \quad -v^2 f(v) = \lim_{\omega \uparrow \infty}^{(g)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega}^{\omega} g(x) e^{-i v x} dx;$$

3. f, f' are absolutely continuous and $f'' \in L_p(-\infty, \infty)$.

Proof: 1. \Rightarrow 2.: We again consider the partial integrals $S_w(x)$ of (3.1). To interchange the order of integration we apply PARSEVAL's formula [16, p. 70 for $p = 2$, p. 105 for $1 < p < 2$]. Indeed, the transform of

$$l(v) = e^{i v x} (|v| < w), \quad 0 (|v| > w),$$

is

$$l(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-w}^w e^{i v x} e^{i v u} dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w(x+u)}{x+u}.$$

Thus by PARSEVAL's formula, one obtains the relation (3.2) for $S_w(x)$. Then one applies PARSEVAL's formula to the Fejér means $\sigma_R(x)$ given by (3.3) to obtain

(3.4). Here one needs the fact that the transform of

$$\hat{m}(v) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) e^{i v z} & (|v| < R) \\ 0 & (|v| > R) \end{cases},$$

is

$$m(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^2 R(x+u)/2}{R(x+u)^2}.$$

It follows that the inequality (3.5) holds in the L_p -metric giving the relation (3.6) in the L_p -metric. Then one continues just as in the proof of Theorem 3.1, applying the lemma of Fatou for L_p -spaces to deduce (3.7) in the L_p -metric. An application of the L_p -version of the Cramér theorem yields the representation (4.1).

2. \Rightarrow 1. Proceeding as in the second half of the proof of Theorem 3.1, one obtains for (3.8) the relation

$$\frac{2}{(2h)^2} [\cos 2vh - 1] f(v) = \tilde{\psi}(2hv) \hat{g}(v) = \frac{\hat{g}(v)}{2h\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\left(\frac{u}{2h}\right) e^{-i v u} du.$$

Since $\alpha(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ and $g(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, we may apply a theorem on the product of two Fourier transforms ([16], Theorem 65 p. 90 in case $p = 2$ and Theorem 77, p. 106 for $1 < p < 2$) to deduce that the above product equals $\varphi_{2h}(v) = \mathfrak{F}[\varphi_{2h}(x)]$, where

$$\varphi_{2h}(x) = \frac{1}{2h\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u) \alpha\left(\frac{u}{2h}\right) du,$$

and also that

$$(4.2) \quad \|\varphi_{2h}\|_{L_p} \leq \|g(x)\|_{L_p} (1/2h) \|\alpha(x/2h)\|_{L_1}.$$

Since

$$\psi\left(\frac{x}{2h}\right) = \frac{1}{2h} \int_0^x \alpha\left(\frac{u}{2h}\right) du,$$

$$(1/\sqrt{2\pi}) \left[\text{Var } \psi\left(\frac{x}{2h}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} = (1/2h) \|\alpha(x/2h)\|_{L_1}.$$

According to (4.2), one has

$$(4.3) \quad \|\varphi_{2h}\|_{L_p} \leq (1/\sqrt{2\pi}) \|g(x)\|_{L_p} [\text{Var } \psi(x/2h)]_{-\infty}^{\infty} \leq M_1 M_2 = M,$$

since $g \in L_p(-\infty, \infty)$ and as ψ is of bounded variation on $(-\infty, \infty)$. Again M_2 and thus M is independent of h . But

$$\frac{1}{(2h)^2} \mathfrak{F}[f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)] = \frac{2}{(2h)^2} (\cos 2vh - 1) f(v) = \mathfrak{F}[\varphi_{2h}(x)],$$

so, according to the uniqueness theorem for L_p -transforms, it follows that

$$\frac{1}{(2h)^2} [f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)] = \varphi_{2h}(x)$$

for almost all x . In view of (4.2), 1. follows.

That the statement 2. is equivalent to 3. follows from known results, compare [2, p. 124, 128–129, 215]. This proves Theorem 4.1.

Theorem 4.2: Let $f \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leq 2$. The following three statements are equivalent:

1. $\|f(x+h) - f(x)\|_{L_p} = O(h) \quad (h \rightarrow 0) ;$
2. there is a function $g \in L_p(-\infty, \infty)$ such that $ivf(v) = \hat{g}(v)$, almost all v ;
3. f is absolutely continuous and $f' \in L_p(-\infty, \infty)$.

The proof of the equivalence of 1. and 2. readily follows by modifying the proof of Theorem 4.1 in the spirit of the proof of Theorem 3.2. The equivalence of 2. and 3. is again known (see [2], as above).

It may be remarked that it is easy to show directly that 3. implies 1. Indeed, according to the generalized Minkowski inequality (see [18], I. p. 19) one has for $p > 1$

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x)\|_{L_p}^p &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_x^{x+h} |f'(u)| du \right\}^p dx \\ &\leq \left[\int_x^{x+h} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f'(u)|^p du \right\}^{1/p} dx \right]^p = h^p \|f'(x)\|_{L_p}^p. \end{aligned}$$

It is of interest to mention that the above theorem may also be proven by an entirely different method, namely by the semi-group methods of [3]. One just needs to apply Theorem 2.1 [3] to the semi-group of translations on the Lebesgue space $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$:

$$T(h)[f(x)] = f(x+h), \quad h \geq 0$$

with norm $\|f\|_{L_p}$ and infinitesimal operator A given by $A = d/dx$ having as domain $D(d/dx)$ the class of absolutely continuous functions $f(x)$ such that $f'(x)$ belongs to $L_p(-\infty, \infty)$ [13, p. 535]. Note that this also gives a proof in case $2 < p < \infty$, whereas the proofs of this note hold only for $1 \leq p \leq 2$.

§ 5. Generalizations to Higher Differences

It is the purpose here to generalize some of the preceding results to higher central differences. It may be pointed out that these results probably also hold for higher forward differences. The central difference of order s of the function $f(x)$, $\Delta_{2h}^s f(x)$, corresponding to the increment $h > 0$, is defined inductively by

$$\Delta_{2h}^1 f(x) = f(x+h) - f(x-h), \quad \Delta_{2h}^s f(x) = \Delta_{2h}^1 [\Delta_{2h}^{s-1} f(x)],$$

i. e.

$$\Delta_{2h}^s f(x) = \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} f[x + (s-2j)h].$$

With this notation we prove:

Theorem 5.1: Let $f \in L_1(-\infty, \infty)$, $s = 1, 2, \dots$ be fixed.

a) If

$$\|\Delta_{2h}^s f(x)\|_{L_1} = o(h^s) \quad (h \rightarrow 0),$$

then f is equal to the null-function in $(-\infty, \infty)$.

b) The following statements are equivalent:

1. $\|A_{2h}^s f(x)\|_{L_1} = O(h^s) \quad (h \rightarrow 0);$

2. there is a function g of bounded variation on $(-\infty, \infty)$ so that for all v

$$\tilde{g}(v) = (-1)^{[s/2]} v^s f(v)^2$$

Proof: We consider first the case for even s , i. e. $s = 2l$ ($l = 1, 2, 3, \dots$). The statements of the Theorem for $s = 2$ are identical to those of Theorems 2.1 and 3.1. We have

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[A_{2h}^{2l} f(x)] &= \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j \binom{2l}{j} \mathfrak{F}[f(x + (2l - 2j)h)] \\ &= \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j \binom{2l}{j} e^{2ivh(l-j)} f(v). \end{aligned}$$

By a repeated application of L'Hospital's rule, one may show that

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2ivhl}}{(2h)^{2l}} \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j \binom{2l}{j} e^{-2ivh(l-j)} = (-1)^l v^{2l}$$

for all v , if one makes use of the identity

$$2 \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j (l-j)^{2l} \binom{2l}{j} = (2l)!$$

Then the proof of part a) follows by an obvious modification of that of Theorem 2.1; the proof of the first statement of part b) is a generalization of that of the corresponding result in Theorem 3.1. Regarding the proof of the second half of part b), one has to represent $(2h)^{-2l} \mathfrak{F}[A_{2h}^{2l} f(x)]$ as a Fourier-Stieltjes integral of a function of bounded variation over $(-\infty, \infty)$, which is also possible. Then the proof follows in a fashion similar to that of the second half of Theorem 3.1.

In the case s is odd, i. e. $s = 2l + 1$ ($l = 1, 2, 3, \dots$), then

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[A_{2h}^{2l+1} f(x)] &= \sum_{j=0}^{2l+1} (-1)^j \binom{2l+1}{j} \mathfrak{F}[f(x + (2l + 1 - 2j)h)] \\ &= \sum_{j=0}^{2l+1} (-1)^j \binom{2l+1}{j} e^{ivh(2l+1-2j)} f(v). \end{aligned}$$

Again by L'Hospital's rule it follows that

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(2l+1)ivh}}{(2h)^{2l+1}} \sum_{j=0}^{2l+1} (-1)^j \binom{2l+1}{j} e^{-2ivh(2l+1-2j)} = (-1)^l v^{2l+1},$$

for all v . Here one uses the identity

$$\sum_{j=0}^l (-1)^j (2l + 1 - 2j)^{2l+1} \binom{2l+1}{j} = 2^{2l} (2l + 1)!$$

The proof may then be completed as above.

²⁾ Here $[x]$ denotes the greatest integer not exceeding x .

Bibliography

- [1] ACHESER, N.: *Theory of Approximation*. New York 1956, 307 pp.
- [2] BOCHNER, S., and K. CHANDRASEKHARAN: *Fourier Transforms*. Princeton 1949, 219 pp.
- [3] BUTZER, P. L.: Über den Approximationsgrad des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale. *Math. Ann.* **133**, 410—425 (1957).
- [4] BUTZER, P. L.: Representation and approximation of functions by general singular integrals. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **63** (= *Indag. Math.* **22**) 1—24 (1960).
- [5] BUTZER, P. L.: Sur le rôle de la transformation de Fourier dans quelques problèmes d'approximation. *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **249**, 2467—2469 (1959).
- [6] BUTZER, P. L.: Fourier transform methods in the theory of approximation. *Arch. Rational Mech. Anal.* **5**, 390—415 (1960).
- [7] BUTZER, P. L.: On Dirichlet's Problem for the half-space and the behavior of its solution on the boundary. *J. of Math. Anal. and Applications* **1** (1960) (in print).
- [8] BUTZER, P. L., and H. KÖNIG: An application of Fourier-Stieltjes transforms in approximation theory. *Arch. Rational Mech. Anal.* **5**, 416—419 (1960).
- [9] CRAMÉR, H.: On the representation of functions by certain Fourier integrals. *Trans. Am. Math. Soc.* **46**, 190—201 (1939).
- [10] ERDÉLYI, A. et al.: *Tables of Integral Transforms*. Vol. I (1954) XX + 391 pp.
- [11] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Some properties of fractional integrals. *Math. Z.* **27**, 565—606 (1928).
- [12] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: A convergence criterion for Fourier series. *Math. Z.* **28**, 612—634 (1928).
- [13] HILLE, E., and R. S. PHILLIPS: *Functional Analysis and Semigroups*. (Revised edition), XII + 808 pp. New York 1957.
- [14] TITCHMARSH, E. C.: A Theorem on Lebesgue integrals. *J. Lond. Math. Soc.* **2**, 36—37 (1927).
- [15] TITCHMARSH, E. C.: *The Theory of Functions*. (Second edition), X + 454 pp. Oxford 1939.
- [16] TITCHMARSH, E. C.: *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. VIII + 395 pp. Oxford 1937.
- [17] WIDDER, D. V.: *The Laplace Transform*. X + 406 pp. Princeton 1941.
- [18] ZYGMUND, A.: *Trigonometrical Series*. Vol. I, II, (revised edition). Cambridge 1959.

(Received June 9, 1960)

A Tauberian Theorem

By

F. J. BUREAU in Liège (Belgium)

Contents

I. Introduction	270
II. The Mellin transform of $u^{-p} \sin^{2n} u$	271
III. The function $\mathfrak{R}_{n,p}(it)$	275
IV. Application of Wiener's Tauberian theorem	278
V. Appendix	283
A. Proof of theorem II'	283
B. Evaluation of $I_{n,p}(it)$ by contour integrals	285
Bibliography	291

I. Introduction

1. This research had its origin in an investigation of the asymptotic representation of the spectral function of self-adjoint elliptic operators of the second order with variable coefficients.

Denote by n and p , positive integers such that $0 < p \leq 2n$ and by $f(t)$, $t \in (0, \infty)$, a function integrable in the sense of Lebesgue over any finite interval $(0, T)$, such that

$$(1) \quad \frac{1}{T^p} \int_0^T |f(t)| dt < M \quad \text{for all } T > 0,$$

M independent of T .

This paper is concerned with the following Tauberian theorem:

Theorem I. *If $f(t) \geq 0$ for all $t > 0$ and (1) holds, then*

$$(2) \quad \begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{2n-p}} \int_0^\infty f(t) t^{-2n} \sin^{2n} \varepsilon t dt \\ &= A p \int_0^\infty t^{-2n-1+p} \sin^{2n} t dt \end{aligned}$$

implies

$$(3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^p} \int_0^T f(t) dt = A.$$

This theorem is a partial converse of

Theorem II. *If (1) holds, then (3) implies (2).*

When $n = p = 1$, theorem II is due to BOCHNER and HARDY; when $n > 1$, it may be deduced from a more general theorem, namely

Theorem II'. Let $f(t)$ be a function defined as above and satisfying (1), and $p > 0$, not necessarily an integer. If $K(x)$ is differentiable in $(0, \infty)$ and such that

- i. $t^{p-1}K(t)$ is Lebesgue integrable in $[0, \infty)$,
- ii. $t^p K'(t)$ is Lebesgue integrable over any finite interval,
- iii. $|t^{2p}K(t)| \leq N$, $1 \leq t < \infty$, N a constant.

Then, (3) implies

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{p-1} \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) K(t) dt = A p \int_0^\infty t^{p-1} K(t) dt.$$

This theorem gives theorem II if $K(t) = t^{-2n} \sin^{2n} t$.

When $n = p = 1$, theorem I is due to N. WIENER who noted that in this case, condition (1) is a consequence of (2). Hence, the Tauberian condition is: $f(t) \geq 0$ for all $t > 0$.

Further, observe that there is no restriction in supposing $f(t) = 0$ for $t < 1$. Indeed, one has

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^p} \int_0^1 f(t) dt &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{2n-p}} \int_0^1 f(t) t^{-2n} \sin^{2n} \varepsilon t dt &= 0, \end{aligned}$$

for $f(t)$ and $t^{-2n} \sin^{2n} \varepsilon t$ are positive and bounded.

2. In this paper our main object is to deduce theorem I from the general Tauberian theorem of N. WIENER. It will be shown that theorem I is equivalent to the following:

Theorem III. The function

$$\mathfrak{R}_{n,p}(it) = \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{p-1-it}$$

t real, vanishes at most for $t = 0$.

Theorem III will be proved for $n = 2$, $p \neq 3$; $n = 3$, $p = 2, 3, 4, 5, 6$; $n = 4$, $p = 3, 4, 5, 6, 7$. Our proof uses the fact that the quotient $\lg 2 : \lg 3$ is irrational. For $n \geq 5$, the question is still open. In particular, it is conjectured that $\mathfrak{R}_{n,n+1}(it)$, t real, $n \geq 5$, vanishes at most for $t = 0$.

II. The Mellin transform of $u^{-p} \sin^{2n} u$

1. In this chapter, we are concerned with the integral

$$I_{n,p}(s) = \int_0^\infty u^{s-p} \sin^{2n} u du$$

where $n \geq 1$ and $p \geq 2$ are integers such that $p \leq 2n$; s is a complex variable.

The integral $I_{n,p}(s)$ exists if $-2n + p - 1 < \Re s < p - 1$. It may be evaluated by employing the generalized Zeta-function $\zeta(s, a)$ and a formula

of A. HURWITZ. The integral $I_{n,p}(it)$, t real, may also be evaluated by using contour integrals and the theory of CAUCHY.

2. For future use, several lemmas are given.

Lemma 1.

$$(1) \quad (2i)^{2n} \sin^{2n} u = (-1)^n C_{2n}^n + \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h e^{2i(n-h)u} \\ + \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h e^{-2i(n-h)u}$$

$$(2) \quad = (-1)^n C_{2n}^n + 2 \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h \cos 2(n-h)u.$$

Proof: Set $y = e^{iu}$ and find

$$(2i \sin u)^{2n} = \left(y - \frac{1}{y}\right)^{2n} \\ = \sum_{h=0}^{2n} (-1)^h C_{2n}^h y^{2(n-h)} \\ = (-1)^n C_{2n}^n + \left(\sum_{h=0}^{n-1} + \sum_{h=n+1}^{2n}\right) (-1)^h C_{2n}^h y^{2(n-h)}.$$

In $\sum_{h=n+1}^{2n}$, replace h by $2n-h$; (1) follows.

Lemma 2. If $k > 0$ is an integer,

$$(3) \quad (2i)^{2n-k} \frac{d^k}{du^k} \sin^{2n} u = \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^k e^{2i(n-h)u} \\ + \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^{h+k} C_{2n}^h (n-h)^k e^{-2i(n-h)u}.$$

Proof: Differentiate (1), k times with respect to u .

Lemma 3.

$$(4) \quad (-1)^n C_{2n}^n + 2 \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h = 0.$$

When $p > 1$ is odd and $2n > p-1$,

$$(5) \quad \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{p-1} = 0.$$

Proof: For (4) and (5), use (1) and (3) with $u = 0$.

Lemma 4. If $m \neq 0$ and $n > 0$ are integers,

$$\int_0^\pi \cos 2mv \, dv = 0, \quad \int_0^\pi \sin 2mv \, dv = 0, \\ \int_0^\pi \cos 2(n-h)v \cos 2mv \, dv = \begin{cases} 0 & \text{when } n-h-m \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{when } m = n-h, \end{cases} \\ \int_0^\pi \cos 2(n-h)v \sin 2mv \, dv = 0,$$

$h = 0, 1, \dots, n-1; m = 1, 2, \dots$

Proof: Use

$$2 \cos 2(n-h)v \cos 2mv = \cos 2(n-h+m)v + \cos 2(n-h-m)v,$$

$$2 \cos 2(n-h)v \sin 2mv = \sin 2(m+n-h)v + \sin 2(m-n+h)v.$$

Lemma 5.

$$\int_0^\pi \sin^{2n} v \cos 2mv \, dv = 0, \quad \text{if } m > n,$$

$$\int_0^\pi \sin^{2n} v \sin 2mv \, dv = 0, \quad \text{if } m \geq 1.$$

Proof: Use lemmas 1 (form. 2) and 4.

Lemma 6. If $p > 0$ is an integer,

$$\sin \frac{\pi}{2}(p-it) = \frac{i^{1-p}}{2} \left[e^{-\frac{\pi}{2}t} + (-1)^{p+1} e^{\frac{\pi}{2}t} \right].$$

Proof: Write $p = q \pmod{4}$, ($q = 0, 1, 2, 3$), and note that $e^{\frac{i\pi p}{2}} = i^p$.

3. The function $\zeta(s; a)$.

Define

$$(6) \quad \zeta(s; a) = \frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(a+n)^s} + \cdots$$

$\Re s > 0$, $\Re a > 0$, $\arg(a+n) = 0$ when a is real.

Consequently,

$$(7) \quad \zeta(s; a) = a^{-s} + \zeta(s; a+1), \quad \Re s > 0, \Re a > 0.$$

Denote by \mathfrak{C} a contour of the Hankel type starting at ∞ on the real axis, encircling the origin in the positive direction and returning to the starting point; we suppose that \mathfrak{C} does not contain the points $\pm 2i\pi h$, ($h = 1, 2, \dots$). Then, when $|\arg(-z)| \leq \pi$, one has

$$(8) \quad \zeta(s; a) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_{\mathfrak{C}} \frac{(-1)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}} dz,$$

$\Re a > 0$, $\Re s \geq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

This expression of $\zeta(s; a)$, as a contour integral shows that $\zeta(s; a)$ is a meromorphic function in the s -plane with only a simple pole at $s = 1$ with residue $+1$.

Besides, if $\Re s < 0$, $0 < a \leq 1$, one has the formula of HURWITZ

$$(9) \quad \zeta(s; a) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left\{ \sin\left(\frac{1}{2}s\pi\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi am}{m^{1-s}} + \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi am}{m^{1-s}} \right\}$$

each of the series being absolutely convergent.

4. To evaluate $I_{n,p}(s)$, suppose $-2n-1 < \Re s - p < -1$ or $-2n + p - 1 < \Re s < p - 1$ and write

$$I_{n,p}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} u^{s-p} \sin^{2n} u \, du.$$

Because

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} u^{s-p} \sin^{2n} u \, du = \pi^{s-p} \int_0^{\pi} \left(k + \frac{v}{\pi}\right)^{s-p} \sin^{2n} v \, dv,$$

one has

$$\begin{aligned} I_{n,p}(s) &= \pi^{s-p} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \left(k + \frac{v}{\pi}\right)^{s-p} \sin^{2n} v \, dv \\ (10) \quad &= \pi^{s-p} \int_0^{\pi} \sin^{2n} v \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{v}{\pi}\right)^{s-p} dv \\ &= \pi^{s-p} \int_0^{\pi} \zeta\left(p-s; \frac{v}{\pi}\right) \sin^{2n} v \, dv. \end{aligned}$$

From (1) and (2), it follows that $I_{n,p}(s)$ is an analytic function of s .

5. Now in (10), suppose $\Re s > p$ and use Hurwitz's formula; one has

$$\begin{aligned} I_{n,p}(s) &= \frac{\Gamma(1-p+s)}{\pi 2^{s-p}} \left[\sin \frac{1}{2} \pi (p-s) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1-p+s}} \int_0^{\pi} \sin^{2n} v \cos 2mv \, dv + \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{1}{2} \pi (p-s) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1-p+s}} \int_0^{\pi} \sin^{2n} v \sin 2mv \, dv \right]. \end{aligned}$$

Using lemma 5, one deduces

$$I_{n,p}(s) = \frac{2^{p-s}}{\pi} \Gamma(1-p+s) \sin \frac{\pi(p-s)}{2} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^{1-p+s}} \int_0^{\pi} \sin^{2n} v \cos 2mv \, dv$$

and

$$\begin{aligned} (2i)^{2n} I_{n,p}(s) &= \frac{2^{p-s+1}}{\pi} \Gamma(1-p+s) \sin \frac{\pi(p-s)}{2} \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{m=1}^n \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h \frac{1}{m^{1-p+s}} \int_0^{\pi} \cos 2(n-h)v \cos 2mv \, dv \right\}. \end{aligned}$$

From lemma 4, it follows

$$(11) \quad (2i)^{2n} I_{n,p}(s) = 2^{p-s} \Gamma(1-p+s) \sin \frac{\pi(p-s)}{2} \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{p-1-s}$$

which gives the value of $I_{n,p}(s)$ in the s -plane.

To abbreviate, set

$$(12) \quad \mathfrak{R}_{n,p}(s) = \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{p-1-s}.$$

When $s = it$, t real, one has [use lemma 6]

$$(13) \quad \begin{aligned} (2i)^{2n} I_{n,p}(it) &= \frac{\Gamma(1-p+it)}{2^{it-p}} \sin \frac{\pi}{2} (p-it) \mathfrak{R}_{n,p}(it) \\ &= \frac{i^{1-p} \Gamma(1-p+it)}{2^{1+it-p}} \left[e^{-\frac{\pi}{2}t} + (-1)^{p+1} e^{\frac{\pi}{2}t} \right] \mathfrak{R}_{n,p}(it). \end{aligned}$$

III. The function $\mathfrak{R}_{n,p}(it)$

1. In this chapter, we are concerned with the nonvanishing of $\mathfrak{R}_{n,p}(it)$ for all real t [$t \neq 0$ when p is odd; see ch. II, lemma 3, form. (5)].

We proceed to consider a number of cases, namely

$n = 1, p = 2$; $n = 2, p = 2, 4$; $n = 3, p = 2, 3, 4, 5, 6$; $n = 4, p = 3, 4, 5, 6, 7$.

2. $n = 1, p = 2$. Then $\mathfrak{R}_{1,2}(it) = 1$ and does not vanish for $-\infty < t < \infty$.
 $n = 2, p = 2, 4$. Then

$$\mathfrak{R}_{2,p}(it) = 2^{p-1-it} - 4.$$

The solutions of the equation

$$2^z = 4$$

are $z = 2 + \frac{2ik\pi}{\lg 2}$, k an integer.

Therefore, when $p \neq 3$, $\mathfrak{R}_{2,p}(it)$ does not vanish for any real value of t . In addition, $\mathfrak{R}'_{2,p}(0) \neq 0$.

3. Before considering other values of n and p , two lemmas are given.

Lemma i. *The equations*

$$(1) \quad \cos(t \lg 2) = 1, \quad \cos(t \lg 3) = 1$$

have no real roots in common, except $t = 0$.

Indeed, from (1), one has

$$t \lg 2 = 2h\pi, \quad t \lg 3 = 2k\pi, \quad h, k \text{ integers};$$

because $\lg 2 : \lg 3$ is not a rational number, there is no real $t \neq 0$ satisfying both relations (1).

Lemma ii. *The equations*

$$\begin{aligned} \cos(t \lg 2) &= -1, \quad \cos(t \lg 3) = -1 \\ [\text{resp. } \cos(t \lg 2) &= 1, \quad \cos(t \lg 3) = -1] \end{aligned}$$

have no real roots in common.

4. $n = 3, p = 2, 3, 4, 5, 6$. One has

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{3,p}(it) &= 3^{p-1-it} - 6 \cdot 2^{p-1-it} + 15 \\ &= 3[3^{p-2-it} - 2^{p-it} + 5]. \end{aligned}$$

Suppose there exists t_0 real such that $\Re_{3,p}(it_0) = 0$, i.e.,

$$3^{p-2-it_0} = 2^{p-it_0} - 5;$$

then

$$(2) \quad 3^{p-2} \cos(t_0 \lg 3) = 2^p \cos(t_0 \lg 2) - 5,$$

$$3^{p-2} \sin(t_0 \lg 3) = 2^p \sin(t_0 \lg 2)$$

and

$$3^{2p-4} = 2^{2p} + 25 - 10 \cdot 2^p \cos(t_0 \lg 2)$$

or

$$10 \cdot 2^p \cos(t_0 \lg 2) = 2^{2p} + 25 - 3^{2p-4}.$$

This relation gives

$$\text{when } p = 4, \cos(t_0 \lg 2) = \frac{5}{4},$$

$$\text{when } p = 6, \cos(t_0 \lg 2) = -\frac{61}{16},$$

and hence, $\Re_{3,4}(it)$ and $\Re_{3,6}(it)$ are different from zero for any real t .

When $p = 2, 3$ or 5 , one has $\cos(t_0 \lg 2) = 1$.

With this value of $\cos(t_0 \lg 2)$, it follows from (2) that

$$\text{when } p = 2, \cos(t_0 \lg 3) = -1,$$

$$\text{when } p = 3 \text{ or } 5, \cos(t_0 \lg 3) = 1.$$

Therefore, $\Re_{3,2}(it)$, $\Re_{3,3}(it)$ and $\Re_{3,5}(it)$ are different from zero for any real $t \neq 0$.

For $t = 0$, one has

$$\text{when } p = 2, \Re_{3,2}(0) \neq 0,$$

$$\text{when } p = 3, \Re_{3,3}(0) = 0, \Re'_{3,3}(0) \neq 0,$$

$$\text{when } p = 5, \Re_{3,5}(0) = 0, \Re'_{3,5}(0) \neq 0.$$

5. $n = 4, p = 3, 4, 5, 6, 7$. One has

$$\begin{aligned} \Re_{4,p}(it) &= 2^{2p-2-2it} - 8 \cdot 3^{p-1-it} + 28 \cdot 2^{p-1-it} - 56 \\ &= 8[2^{2p-5-2it} - 3^{p-1-it} + 7 \cdot 2^{p-2-it} - 7]. \end{aligned}$$

Suppose there exists t_0 real such that $\Re_{4,p}(it_0) = 0$, i.e.,

$$3^{p-1-it_0} = 2^{2p-5-2it_0} + 7 \cdot 2^{p-2-it_0} - 7;$$

then

$$(3) \quad 3^{p-1} \cos(t_0 \lg 3) = 2^{2p-5} \cos(2t_0 \lg 2) + 7 \cdot 2^{p-2} \cos(t_0 \lg 2) - 7,$$

$$3^{p-1} \sin(t_0 \lg 3) = 2^{2p-5} \sin(2t_0 \lg 2) + 7 \cdot 2^{p-2} \sin(t_0 \lg 2)$$

and

$$\begin{aligned} (4) \quad &14 \cdot 2^{2p-5} \cos(2t_0 \lg 2) - 14 \cdot 2^{p-2} [2^{2p-5} - 7] \cos(t_0 \lg 2) - \\ &- [2^{4p-10} + 49 \cdot 2^{2p-4} + 49 - 3^{2p-2}] = 0. \end{aligned}$$

This relation gives $\cos(t_0 \lg 2)$ for each value of p ; then, (3) determines $\cos(t_0 \lg 3)$.

We give only the results.

$$\begin{aligned} p = 3; \quad & \cos(2t_0 \lg 2) + 5 \cos(t_0 \lg 2) - 6 = 0, \\ & 2 \cos^2(t_0 \lg 2) + 5 \cos(t_0 \lg 2) - 7 = 0; \\ & \cos(t_0 \lg 2) = 1, \quad \cos(2t_0 \lg 2) = 1, \\ & \cos(t_0 \lg 3) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p = 4; \quad & 2 \cos(2t_0 \lg 2) - \cos(t_0 \lg 2) - 3 = 0, \\ & 4 \cos^2(t_0 \lg 2) - \cos(t_0 \lg 2) - 5 = 0; \\ & \cos(t_0 \lg 2) = -1, \quad \cos(2t_0 \lg 2) = 1, \\ & \cos(t_0 \lg 3) = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p = 5; \quad & 4 \cos(2t_0 \lg 2) - 25 \cos(t_0 \lg 2) + 21 = 0, \\ & 8 \cos^2(t_0 \lg 2) - 25 \cos(t_0 \lg 2) + 17 = 0; \\ & \cos(t_0 \lg 2) = 1, \quad \cos(2t_0 \lg 2) = 1, \\ & \cos(t_0 \lg 3) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p = 6; \quad & 32 \cos(2t_0 \lg 2) - 4.121 \cos(t_0 \lg 2) + 3.179 = 0, \\ & 64 \cos^2(t_0 \lg 2) - 4.121 \cos(t_0 \lg 2) + 505 = 0, \end{aligned}$$

whose roots are greater than 1.

One may also use the relation

$$\sin 4a = 1 - 8 \sin^2 a + 8 \sin^4 a, \quad a = \frac{t_0}{2} \lg 2,$$

and find

$$32.8 \sin^4 a + 8.89 \sin^2 a + 85 = 0$$

which is impossible for a real.

$$\begin{aligned} p = 7; \quad & 16 \cos(2t_0 \lg 2) - 505 \cos(t_0 \lg 2) + 3.163 = 0, \\ & 32 \cos^2(t_0 \lg 2) - 505 \cos(t_0 \lg 2) + 473 = 0; \\ & \cos(t_0 \lg 2) = 1, \quad \cos(2t_0 \lg 2) = 1, \\ & \cos(t_0 \lg 3) = 1. \end{aligned}$$

Therefore, $\Re_{4,p}(it)$, ($p = 3, 4, 5, 6, 7$), does not vanish for $-\infty < t < \infty$, (except for $t = 0$ when p is odd).

6. Let us write

$$\Re(s) = \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h \frac{1}{(n-h)^s} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{2n}^{n-k} \frac{1}{k^s}.$$

Obviously,

$$\Re(1-p-it) \equiv \Re_{n,p}(it)$$

and

$$\Re(s) = (-1)^{n-1} C_{2n}^{n-1} \Im(s)$$

where

$$\begin{aligned} \Im(s) = 1 - \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{1}{2^s} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{(n-k+1) \dots (n-1)}{(n+2) \dots (n+k)} \cdot \frac{1}{k^s} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{(n+2) \dots 2n} \cdot \frac{1}{n^s}. \end{aligned}$$

Suppose k is fixed; when n tends to infinity,

$$\frac{(n-k+1) \dots (n-1)}{(n+2) \dots 2n}$$

tends to 1 and $\mathfrak{H}(s)$ may be considered as an approximate representation of

$$(1 - 2^{1-s}) \zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s} + \dots$$

IV. Application of Wiener's Tauberian theorem

1. The following definitions are used.

i. A function $f(t)$ belongs to the class L if it is Lebesgue integrable in $(-\infty, \infty)$.

ii. A function $f(t)$ belongs to the class B if it is bounded in $(-\infty, \infty)$.

iii. A function $f(t)$ belongs to the class W if it belongs to L and if its Fourier transform does not vanish in $(-\infty, \infty)$.

iv. A function belongs to the class M if it is continuous in $(-\infty, \infty)$ and if

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{u.b. } |f(t)| < \infty, \quad n \leq t < n+1$$

A function $f(t)$ which belongs to the classes A and B , for example, is said to belong to the class AB .

We are concerned with Wiener's Tauberian theorem:

Theorem WM. Suppose

i. $K_1(x) \in WM$, $K_2(x) \in M$;

ii. $g(t)$ is of bounded variation in every finite interval and such that

$$\int_x^{x+1} |dg(t)| \in B, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

iii.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t) dg(t) = A \int_{-\infty}^{\infty} K_1(t) dt,$$

A a constant;
then,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t) dg(t) = A \int_{-\infty}^{\infty} K_2(t) dt.$$

2. In formula I, (2), set

$$v = e^{-x}, \quad t = e^{-y},$$

$$(1) \quad F(y) = \frac{f(e^y)}{e^{(p-1)y}}, \quad K_1(y) = \frac{(\sin e^y)^{2n}}{e^{2(n-p)y}};$$

one finds

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(y-x) F(y) dy = A p \int_{-\infty}^{\infty} K_1(y) dy.$$

On setting

$$(3) \quad g(y) = \int_0^y F(y) dy,$$

equation (2) becomes

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(y-x) dg(y) = A p \int_{-\infty}^{\infty} K_1(y) dy.$$

In order to apply theorem *WM*, we must consider the related properties of $g(y)$ and $K_1(y)$.

3. *The function $g(y)$.* Because $f(t) = 0$ when $t < 1$ and $f(t) > 0$ when $t \geq 1$ [see I, 1], it is clear that $F(y) = 0$ when $y < 0$ and $F(y) > 0$ when $y \geq 0$.

First, we show that

$$\int_x^{x+1} F(y) dy \in B, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Because $F(y)$ is positive or zero and $K_1(y)$ is always positive, one has

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-y) F(y) dy \\ \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+1} K_1(x-y) F(y) dy \\ \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \min_{0 \leq t \leq 1} K_1(t) \int_x^{x+1} F(y) dy. \end{aligned}$$

Hence,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+1} F(y) dy < \infty.$$

But, $F(y)$ is integrable over any finite interval and vanishes for all negative values of y ; therefore, there exists a constant M such that

$$(5) \quad \int_x^{x+1} F(y) dy < M, \quad -\infty < x < \infty.$$

From the definition of $g(y)$ [cf. (3)] and from the properties of $f(t)$ and $F(y)$, it follows that $g(y)$ is of bounded variation in every finite interval. Moreover, since $F(y) \geq 0$, it follows from (5) that

$$(6) \quad \int_x^{x+1} |dg(y)| = g(x+1) - g(x) = \int_x^{x+1} F(y) dy$$

is bounded.

In the same way, it may be proved that if

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x e^{p(y-x)} F(y) dy = A,$$

then (6) holds.

4. *The kernel $K_1(y)$.* It is clear that $K_1(y)$ given by (1) belongs to the classes L and M . Its Fourier transform is

$$\mathfrak{F} K_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it y} \frac{(\sin e^y)^{2n}}{e^{(2n-p)y}} dy = \int_0^{\infty} u^{-it} \frac{\sin^{2n} u}{u^{2n+1-p}} du$$

[set $e^y = u$] and is the Mellin transform of $\frac{\sin^{2n} u}{u^{2n+1-p}}$.

Therefore, one has

$$\mathfrak{F}K_1(t) = I_{2n, 2n+1-p}(-it) \\ = \frac{i^p}{2^{p-it}} \Gamma(p-2n-it) \left[e^{\frac{\pi}{2}t} + (-1)^p e^{-\frac{\pi}{2}t} \right] \mathfrak{R}_{2n, 2n+1-p}(-it)$$

where

$$\mathfrak{R}_{2n, 2n+1-p}(-it) = \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{2n-p+it}.$$

To show that $K_1(y)$ belongs to the class W , we have to verify that $\mathfrak{F}K_1(t)$ does not vanish for $-\infty < t < \infty$.

First, $\Gamma(p-2n-it) \neq 0$ because $\frac{1}{\Gamma(z)}$ is an entire function of z .

Suppose p is odd. Then $e^{\frac{\pi}{2}t} - e^{-\frac{\pi}{2}t}$ has a simple zero at $t = 0$. However, because

$$\Gamma(1-it) = -it(-it-1) \dots (p-2n-it) \Gamma(p-2n-it),$$

the product

$$\Gamma(p-2n-it) \left[e^{\frac{\pi}{2}t} + (-1)^p e^{-\frac{\pi}{2}t} \right]$$

is not zero at $t = 0$.

Suppose p is even. Then $\mathfrak{R}_{2n, 2n+1-p}(0) = 0$ (II, lemma 3); however, $\mathfrak{F}K_1(t)$ remains finite at $t = 0$.

Hence, to show that $K_1(y)$ belongs to the class W , one has only to verify that $\mathfrak{R}_{2n, 2n+1-p}(-it)$ does not vanish for $-\infty < t < \infty$, (except $t = 0$ when p is even). This has been done in chapter III, in a number of cases, namely, $n = 1, p = 1$; $n = 2, p = 1, 3$; $n = 3, p = 1, 2, 3, 4, 5$; $n = 4, p = 2, 3, 4, 5, 6$.

5. *The kernel $K_2(x)$.* We want to apply theorem WM with the kernel

$$(7) \quad K_2(y) = \begin{cases} e^{py} & \text{if } -\infty < y < 0, \\ 0 & \text{if } 0 < y < \infty. \end{cases}$$

However¹), because $K_2(y)$ is discontinuous and thus does not belong to M , one has to consider instead of $K_2(y)$, a family of kernels $K_2(x; a)$ defined for $a > 0$ by

$$K_2(x; a) = \frac{1}{a} \int_x^{x+a} K_2(u) du \\ = \begin{cases} 0 & \text{when } x+a \geq a, \\ \frac{1}{ap} (1 - e^{px}) & \text{when } 0 \leq x+a < a, \\ \frac{e^{px}}{ap} (e^{pa} - 1) & \text{when } x+a < 0. \end{cases}$$

We note for future reference that

$$(8) \quad \frac{e^{pa} - 1}{ap} K_2(x) \leq K_2(x; a) \leq \frac{1 - e^{-ap}}{ap} K_2(x+a).$$

¹) Cf. N. WIENER [5, c], p. 143.

Clearly, the function $K_2(x; a)$ belongs to M . Its Fourier transform is

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} dx \int_x^{x+a} K_2(u) du &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} dx \int_0^a K_2(x+u) du \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} K_2(x+u) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{p(x+u)} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a e^{pu} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(it-p)x} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \frac{e^{itu}}{p-it} du = \frac{1}{a} \cdot \frac{e^{ita} - 1}{it(p-it)}. \end{aligned}$$

Because $e^{ita} - 1$ vanishes only for $t = \frac{2k\pi}{a}$, k an integer, there exists no single value of t for which the Fourier transform of every function $K_2(x; a)$ vanishes for every a . Therefore by theorem WM

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-y) dg(y) = A$$

is equivalent to

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y; a) dg(y) &= Ap \int_{-\infty}^{\infty} K_2(y; a) dy \\ &= \frac{Ap}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_y^{y+a} K_2(u) du \\ (9) \quad &= \frac{Ap}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^a K_2(y+u) du \\ &= \frac{Ap}{a} \int_0^a du \int_{-\infty}^{\infty} K_2(y) dy = \frac{Ap}{a} \cdot \frac{a}{p} = A \end{aligned}$$

for all $a > 0$.

Now, we show that the validity of (9) for every $a > 0$ implies

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) dg(y) = A.$$

To this end, we use (8). Because $g(y)$ is a monotone increasing function, one has

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y; a) dg(y) \geq \frac{e^{pa} - 1}{ap} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) dg(y)$$

and

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y; a) dg(y) \geq \frac{e^{pa}-1}{ap} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) dg(y);$$

since the first limit exists and is equal to A , one finds

$$(10) \quad \frac{e^{pa}-1}{ap} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) dg(y) \leq A.$$

In the same manner, one has

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y; a) dg(y) &\leq \frac{1-e^{-ap}}{ap} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y+a) dg(y), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y; a) dg(y) &\leq \frac{1-e^{-ap}}{ap} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y+a) dg(y), \end{aligned}$$

or, replacing x by $x+a$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y; a) dg(y) \leq \frac{1-e^{-ap}}{ap} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) dg(y);$$

finally,

$$(11) \quad A \leq \frac{1-e^{-ap}}{ap} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) dg(y).$$

Hence, from (10) and (11),

$$\frac{e^{pa}-1}{ap} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) dg(y) \leq A \leq \frac{1-e^{-ap}}{ap} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) dg(y).$$

These relations hold for $a > 0$; when a is arbitrarily small, $\frac{e^{pa}-1}{ap}$ and $\frac{1-e^{-ap}}{ap}$ are as near as we wish to 1. Therefore,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) dg(y)$$

exists and is equal to A .

6. On using the values of $K_2(y)$ and $g(y)$ [see (7) and (3) respectively], one has

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) dg(y) &= \int_{-\infty}^x e^{p(y-x)} F(y) dy \\ &= e^{-px} \int_{-\infty}^x f(e^y) e^y dy. \end{aligned}$$

Therefore, on setting $t = e^y$, $T = e^x$, and because

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-y) dg(y) = A,$$

one finds

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^p} \int_0^T f(t) dt = A.$$

Thus, theorem 1 is proved.

V. Appendix

In this appendix, a proof of theorem II' and the evaluation of $I_{n,p}(it)$ by contour integrals are given.

A. Proof of theorem II'

If $f(t)$ and $K(t)$ satisfy the conditions of theorem II',

$$(1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^p} \int_0^T f(t) dt = A$$

implies

$$(2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{p-1} \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) K(t) dt = A p \int_0^{\infty} t^{p-1} K(t) dt.$$

Proof. There is no restriction in supposing $A = 0$. Indeed, in (1) and (2), replace $f(t)$ by $f^*(t) = f(t) - pAt^{p-1}$; then

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^p} \int_0^T f^*(t) dt = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{p-1} \int_0^{\infty} f^*\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) K(t) dt = 0$$

and the theorem is valid with $A = 0$. Hence, suppose $A = 0$.

To evaluate the integral on the left hand side of (2), write

$$(3) \quad \int_0^{\infty} \varepsilon^{p-1} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) K(t) dt = \int_0^B + \int_B^{\infty} = J_1 + J_2$$

where $B \geq 1$ and evaluate J_1 and J_2 .

a) To evaluate J_2 , set

$$g(x) = \int_0^x |f(t)| dt$$

so that $g(x) < Mx^p$ for all $x > 0$ [see I, (1)].

If $C > B$, one finds

$$\begin{aligned} \int_B^C \frac{|f(t)|}{t^{2p}} dt &= \int_B^C \frac{dg(t)}{t^{2p}} \\ &= \frac{g(t)}{t^{2p}} \Big|_B^C + 2p \int_B^C \frac{g(t)}{t^{2p+1}} dt \leq \\ &\leq \frac{g(C)}{C^{2p}} + 2p \int_B^C \frac{M}{t^{2p+1}} dt \leq \frac{3M}{B^p}. \end{aligned}$$

Further,

$$\begin{aligned} \left| \int_B^\infty f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) K(t) dt \right| &\leq \int_B^\infty \frac{\left| f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right|}{t^p} |t^p K(t)| dt \leq \\ &\leq N \int_B^\infty \left| f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right| \frac{dt}{t^{2p}} \leq \frac{N}{\varepsilon^{2p-1}} \int_{B/\varepsilon}^\infty \frac{|f(y)|}{y^{2p}} dy \leq \\ &\leq \frac{N}{\varepsilon^{2p-1}} \cdot \frac{3MN\varepsilon^p}{B^p} = \frac{3MN}{\varepsilon^{p-1}B^p}. \end{aligned}$$

Consequently,

$$(4) \quad |J_2| \leq \frac{3MN}{B^p}.$$

b) To evaluate J_1 , set

$$g_\varepsilon(t) = \varepsilon^{p-1} \int_0^t f\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy;$$

one finds

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(t) &= \varepsilon^p \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} f(y) dy = \varepsilon^p \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^p \left[\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^p \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} f(y) dy \right] \leq \\ &\leq t^p \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^p g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \leq Mt^p. \end{aligned}$$

Further, on setting $T = \frac{t}{\varepsilon}$, one has

$$\frac{g_\varepsilon(t)}{t^p} = \frac{\varepsilon^p}{t^p} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} f(y) dy = \frac{1}{T^p} \int_0^T f(y) dy.$$

Now suppose $t \geq a > 0$, a fixed, and let $\delta > 0$ be arbitrarily given. Because $A = 0$, there exists ε_0 such that for every ε satisfying $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, and $t \geq a$, one has

$$(5) \quad \left| \frac{g_\varepsilon(t)}{t^p} \right| < \delta.$$

Write

$$(6) \quad \begin{aligned} J_1 &= \int_0^B K(t) dg_\varepsilon(t) \\ &= g_\varepsilon(B) K(B) - \int_0^B g_\varepsilon(t) K'(t) dt \end{aligned}$$

and observe that

$$(7) \quad |g_\varepsilon(B) K(B)| = \left| \frac{g_\varepsilon(B)}{B^p} \cdot B^p K(B) \right| \leq \frac{MN}{B^p}.$$

To evaluate the integral on the right hand side of (6), split the interval $(0, B)$ into $(0, a)$ and (a, B) . Then,

$$(8) \quad \begin{aligned} \left| \int_0^a g_\varepsilon(t) K'(t) dt \right| &= \left| \int_0^a \frac{g_\varepsilon(t)}{t^p} \cdot t^p K'(t) dt \right| \leq \\ &\leq M \int_0^a t^p |K'(t)| dt = o(a), \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} \left| \int_a^B g_\varepsilon(t) K'(t) dt \right| &= \left| \int_a^B \frac{g_\varepsilon(t)}{t^p} t^p K'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \max_{t \geq a} \left| \frac{g_\varepsilon(t)}{t^p} \right| \cdot \int_0^\infty |t^p K'(t)| dt \equiv E. \end{aligned}$$

Now, with $\delta > 0$ arbitrarily given, choose B such that $\frac{4MN}{B^p} \leq \eta$ [see (4), (7)], then $a > 0$ such that $o(a) \leq \eta$ [see (8)] and finally ε_0 such that $E \leq \eta$ [see (9) and (5)].

Then,

$$\left| \varepsilon^{p-1} \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) K(t) dt \right| \leq 3\delta, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

and theorem II' is proved.

B. Evaluation of $I_{n,p}(it)$ by contour integrals

1. Write

$$(1) \quad I_{n,p}(it) = \int_0^\infty u^{it-p} \sin^{2n} u du$$

$$n \geq 1, 2n \geq p \geq 2.$$

Suppose $2n \geq p > 2$. On integrating by parts $p-2$ times, one has

$$\begin{aligned} I_{n,p}(it) &= \frac{u^{it-p+1}}{it-p+1} \sin^{2n} u \Big|_0^\infty - \frac{1}{it-p+1} \int_0^\infty u^{it-p+1} \frac{d}{du} \sin^{2n} u \, du \\ &= -\frac{1}{it-p+1} \int_0^\infty u^{it-p+1} \frac{d}{du} \sin^{2n} u \, du \\ &= \frac{(-1)^2}{(it-p+1)(it-p+2)} \int_0^\infty u^{it-p+2} \frac{d^2}{du^2} \sin^{2n} u \, du \\ &= \frac{(-1)^{p-2}}{(it-p+1) \dots (it-2)} \int_0^\infty u^{it-2} \frac{d^{p-2}}{du^{p-2}} \sin^{2n} u \, du. \end{aligned}$$

Setting

$$(2) \quad I_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty u^{it-2} \frac{d^{p-2}}{du^{p-2}} \sin^{2n} u \, du, \quad (\varepsilon > 0),$$

one finds

$$(3) \quad I_{n,p}(it) = \frac{(-1)^{p-2}}{(it-p+1) \dots (it-2)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon.$$

To evaluate I_ε , use II, (3) with $k = p-2$; then

$$\begin{aligned} (4) \quad (2i)^{2n-p+2} I_\varepsilon &= \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{p-2} \int_\varepsilon^\infty u^{it-2} e^{2i(n-h)u} \, du + \\ &\quad + \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^{h+p-2} C_{2n}^h (n-h)^{p-2} \int_\varepsilon^\infty u^{it-2} e^{-2i(n-h)u} \, du. \end{aligned}$$

In the integrals on the right hand side, set $u = (1+v)\varepsilon$; one has

$$\begin{aligned} (5) \quad &\int_\varepsilon^\infty u^{it-2} e^{2i(n-h)u} \, du \\ &= \varepsilon^{it-1} e^{2i(n-h)\varepsilon} \int_0^\infty (1+v)^{it-2} e^{2i(n-h)\varepsilon v} \, dv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad &\int_\varepsilon^\infty u^{it-2} e^{-2i(n-h)u} \, du \\ &= \varepsilon^{it-1} e^{-2i(n-h)\varepsilon} \int_0^\infty (1+v)^{it-2} e^{-2i(n-h)\varepsilon v} \, dv. \end{aligned}$$

Hence, the evaluation of $I_{n,p}(it)$ follows from the evaluation of

$$(7) \quad H(\pm c) = \int_0^\infty (1+v)^{it-2} e^{\pm icv} \, dv,$$

t real and $c > 0$.

2. We begin by evaluating

$$(8) \quad H(c) = \int_0^\infty (1+v)^{it-2} e^{icv} \, dv$$

t real, $c > 0$.

In the half plane $\Re v \geq 0$, consider the contour $OABO$, where AB is an arc of $|v| = R$, $Rv \geq 0$.

Because $c > 0$, it follows from Jordan's lemma that

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_A^B (1+v)^{t-p} e^{icv} dv = 0.$$

Indeed, setting $v = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, one finds

$$|1+v|^2 = 1 + R^2 + 2R^2 \cos \theta > R^2,$$

$$\arg(1+v) = \arctg \frac{R \sin \theta}{1 + R \cos \theta} = \alpha, \text{ say,}$$

$$0 \leq \arg(1+v) < \frac{\pi}{2},$$

$$|(1+v)^{t-p}| = e^{-p \operatorname{Im} v} |1+v|^{-t-p} = \frac{e^{-t\alpha}}{|1+v|^p} < \frac{e^{-t\alpha}}{R^p}$$

which tends to zero when $R \rightarrow \infty$.

Hence, it follows from Cauchy's integral formula

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B.$$

On OB , set $v = iy$, $0 \leq y < \infty$. Writing

$$(9) \quad H_p^+(c) = \int_0^\infty (1+iy)^{t-p} e^{-cy} dy$$

$p \geq 0$ an integer, one has

$$(10) \quad H(c) = iH_2^+(c)$$

where

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (1+iy) = \frac{\pi}{2}.$$

In (9), integrate by parts and obtain

$$H_2^+(c) = -\frac{1}{i(it-1)} + \frac{c}{i(it-1)} H_1^+(c),$$

$$H_1^+(c) = \frac{1}{t} - \frac{c}{t} H_0^+(c);$$

then

$$(11) \quad \begin{aligned} H(c) &= iH_2^+(c) \\ &= -\frac{1}{it-1} + \frac{c}{t(it-1)} - \frac{c^2}{t(it-1)} H_0^+(c). \end{aligned}$$

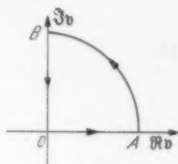


Fig. 1

Moreover,

$$\begin{aligned}
 H_0^+(c) &= \int_0^\infty (1 + iy)^{it} e^{-cy} dy \quad (\text{set } cy = x) \\
 &= \frac{1}{c^{1+it}} \int_0^\infty (c + ix)^{it} e^{-x} dx \\
 (12) \quad &= \frac{1}{c^{1+it}} \int_0^\infty e^{it \left[\lg|c+ix| + i \operatorname{arctg} \frac{x}{c} \right] - x} dx \\
 &= \frac{1}{c^{1+it}} \int_0^\infty e^{\frac{it}{2} \lg(c^2 + x^2) - i \operatorname{arctg} \frac{x}{c} - x} dx \\
 &= \frac{1}{c^{1+it}} \mathfrak{H}^+(c) \quad (\text{say})
 \end{aligned}$$

where $0 \leq \operatorname{arctg} \frac{x}{c} < \frac{\pi}{2}$, because $c > 0$.

When t is fixed and c tends to zero, the last integral $\mathfrak{H}^+(c)$ tends to

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{it \lg x - \frac{\pi}{2} t - x} dx &= e^{-\frac{\pi}{2} t} \int_0^\infty x^{it} e^{-x} dx \\
 &= e^{-\frac{\pi}{2} t} \Gamma(1 + it);
 \end{aligned}$$

hence,

$$(13) \quad \lim_{c \rightarrow 0} \mathfrak{H}^+(c) = e^{-\frac{\pi}{2} t} \Gamma(1 + it).$$

3. We now proceed to evaluate

$$(14) \quad H(-c) = \int_0^\infty (1 + v)^{it-2} e^{-icv} dv$$

t real, $c > 0$.

We use the method of the last paragraph, the path of integration being in the lower half plane. One finds

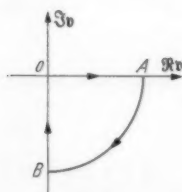


Fig. 2

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{AB} = 0,$$

$$\lim_{A \rightarrow 0} \int_A = \lim_{B \rightarrow 0} \int_B.$$

On OB , set $v = -iy$, $0 \leq y < \infty$.

Writing

$$(15) \quad H_p^-(c) = \int_0^\infty (1 - iy)^{it-p} e^{-cy} dy$$

$p \geq 0$ an integer, one has

$$(16) \quad H(-c) = -i H_2^-(c)$$

where

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \arg(1 - iy) = -\frac{\pi}{2}.$$

Integration by parts gives

$$\begin{aligned} H_2(c) &= \frac{1}{i(it-1)} - \frac{e}{i(it-1)} H_1(c), \\ H_1(c) &= -\frac{1}{t} + \frac{e}{t} H_0(c), \\ H(-c) &= -iH_2(c) \\ (17) \quad &= -\frac{1}{it-1} - \frac{e}{t(it-1)} + \frac{e^2}{t(it-1)} H_0(c). \end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned} H_0(c) &= \int_0^\infty (1 - iy)^{it} e^{-cy} dy \quad (\text{set } cy = x) \\ &= \frac{1}{c^{1+it}} \int_0^\infty (c - ix)^{it} e^{-x} dx \\ (18) \quad &= \frac{1}{c^{1+it}} \int_0^\infty e^{it \left[\lg|c-ix| - i \arctg \frac{x}{c} \right] - x} dx \\ &= \frac{1}{c^{1+it}} \int_0^\infty e^{i \frac{t}{2} \lg(c^2 + x^2) + t \arctg \frac{x}{2} - x} dx \\ &= \frac{1}{c^{1+it}} \mathfrak{H}^-(c) \quad (\text{say}) \end{aligned}$$

where $0 \leq \arctg \frac{x}{c} < \frac{\pi}{2}$, because $c > 0$.

When t is fixed and c tends to zero, this last integral tends to

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{it \lg x + \frac{\pi}{2} t - x} dx &= e^{\frac{\pi}{2} t} \int_0^\infty x^{it} e^{-x} dx \\ &= e^{\frac{\pi}{2} t} \Gamma(1 + it); \end{aligned}$$

hence

$$(19) \quad \lim_{c \rightarrow 0} \mathfrak{H}^-(c) = e^{\frac{\pi}{2} t} \Gamma(1 + it).$$

4. Now, we complete the evaluation of $I_{n,p}(it)$. One has

$$\begin{aligned}
 (2i)^{2n-p+2} \varepsilon^{1-it} I_\varepsilon &= \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{p-2} e^{2it(n-h)\varepsilon} H[2(n-h)\varepsilon] \\
 &+ \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^{h+p-2} C_{2n}^h (n-h)^{p-2} e^{-2it(n-h)\varepsilon} H[-2(n-h)\varepsilon] \\
 &= \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{p-2} e^{2it(n-h)\varepsilon} \times \\
 (20) \quad &\times \left\{ -\frac{1}{it-1} + \frac{2(n-h)\varepsilon}{t(it-1)} - \frac{4(n-h)^2\varepsilon^2}{t(it-1)} H_0^+ [2(n-h)\varepsilon] \right\} + \\
 &+ \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^{h+p-2} C_{2n}^h (n-h)^{p-2} e^{-2it(n-h)\varepsilon} \times \\
 &\times \left\{ -\frac{1}{it-1} - \frac{2(n-h)\varepsilon}{t(it-1)} + \frac{4(n-h)^2\varepsilon^2}{t(it-1)} H^- [2(n-h)\varepsilon] \right\}.
 \end{aligned}$$

Because

$$\begin{aligned}
 &\sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{p-2} e^{2it(n-h)\varepsilon} + \\
 &+ \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^{h+p-2} C_{2n}^h (n-h)^{p-2} e^{-2it(n-h)\varepsilon} \\
 &= (2i)^{2n-p+2} \frac{d^{p-2} \sin^{2n} u}{du^{p-2}} \Big|_{u=\varepsilon} = O(\varepsilon^{2n-p+2}) = O(\varepsilon^2), \\
 &\sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{p-1} e^{2it(n-h)\varepsilon} + \\
 &+ \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^{h+p-2} C_{2n}^h (n-h)^{p-1} e^{-2it(n-h)\varepsilon} \\
 &= (2i)^{2n-p+1} \frac{d^{p-2} \sin^{2n} u}{du^{p-2}} \Big|_{u=\varepsilon} = O(\varepsilon^{2n-p+1}) = O(\varepsilon),
 \end{aligned}$$

it follows that, when $\varepsilon \rightarrow 0$, $(2i)^{2n-p+2} I_\varepsilon$ has the same limit as

$$\begin{aligned}
 &-\frac{4\varepsilon^{it+1}}{t(it-1)} \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^p e^{2it(n-h)\varepsilon} H_0^+ [2(n-h)\varepsilon] \\
 &+ \frac{4\varepsilon^{it+1}}{t(it-1)} \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^{h+p} C_{2n}^h (n-h)^p e^{-2it(n-h)\varepsilon} H_0^- [2(n-h)\varepsilon] \\
 &= -\frac{2^{1-it}}{t(it-1)} \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{p-1-it} e^{2it(n-h)\varepsilon} \mathfrak{H}^+ [2(n-h)\varepsilon] \\
 &+ \frac{2^{1-it}}{t(it-1)} \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^{h+p} C_{2n}^h (n-h)^{p-1-it} e^{-2it(n-h)\varepsilon} \mathfrak{H}^- [2(n-h)\varepsilon].
 \end{aligned}$$

When $\varepsilon \rightarrow 0$, according to (13) and (19), the right side of the equality tends to

$$\begin{aligned}
 &-\frac{2^{1-it}}{t(it-1)} \Gamma(1+it) e^{-\frac{\pi}{2}t} \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h C_{2n}^h (n-h)^{p-1-it} \\
 (20) \quad &+ \frac{2^{1-it}}{t(it-1)} \Gamma(1+it) e^{\frac{\pi}{2}t} \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^{h+p} C_{2n}^h (n-h)^{p-1-it} \\
 &= -2^{1-it} \frac{\Gamma(1+it)}{t(it-1)} \left[e^{-\frac{\pi}{2}t} + (-1)^{p+1} e^{\frac{\pi}{2}t} \right] \mathfrak{R}_{n,p}(it)
 \end{aligned}$$

where $\mathfrak{R}_{n,p}(s)$ is given by (12), chap. II.

Finally, with (3) and (20), one finds

$$\begin{aligned}(2i)^{2n} I_{n,p}(it) &= \frac{(-1)^{p-1} 2^{1-n} \Gamma(1+it)}{(2i)^{p-p}(it-p+1) \dots (it-1)t} \left[e^{-\frac{\pi}{2}t} + (-1)^{p+1} e^{\frac{\pi}{2}t} \right] \mathfrak{R}_{n,p}(it) \\ &= \frac{i^{1-p} \Gamma(1-p+it)}{2^{1+it-p}} \left[e^{-\frac{\pi}{2}t} + (-1)^{p+1} e^{\frac{\pi}{2}t} \right] \mathfrak{R}_{n,p}(it).\end{aligned}$$

Bibliography

- [1] BOCHNER, S.: a) Vorlesungen über Fouriersche Integrale. 1932 [see § 9, pp. 30—32].
- [2] BOCHNER, S., and G. H. HARDY: a) Notes on two theorems of Norbert Wiener. *J. London Math. Soc.* **1**, 240—244 (1926).
- [3] BUREAU, F. J.: a) Asymptotic representation of the spectral function of self-adjoint elliptic operators of the second order with variable coefficients. Technical Note No. 2. To appear in *J. Math. Analysis and Applications* **1** (1960). — b) Sur la distribution asymptotique des fonctions propres des équations aux dérivées partielles et le problème de Cauchy. (VI Congresso dell' Unione Mat. Italiana, Napoli 11—16 settembre 1959; comunicazioni, p. 25.) — c) Sur la représentation asymptotique de la fonction spectrale des opérateurs elliptiques du second ordre. *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **249**, 1071—1073 (1959).
- [4] CHENG, M. T.: a) Some Tauberian theorems with application to multiple Fourier series. *Ann. Math.* **50**, 763—776 (1949).
- [5] WIENER, N.: a) On a theorem of Bochner and Hardy. (*J. London Math. Soc.* **2**, 118—123 (1927).) — b) The harmonic analysis of irregular motion. (*J. Math. Phys.* **5**, 99—121 (1925—1926).) — c) The Fourier Integral and certain of its applications. 1933, § 20.

(Received May 19, 1960)

Convexity of Chebyshev Sets

By

VICTOR KLEE* in Seattle and Copenhagen

§ 0. Introduction

A famous theorem of CHEBYSHEV asserts that if C is the space of all continuous real functions on $[0, 1]$ and P_n is the subspace of C consisting of all polynomials of degree $\leq n$, then each member of C admits a unique best uniform approximation by a member of P_n . Accordingly, a subset X of a metric space M will be called a *Chebyshev set* provided each point of M admits a unique nearest point in X . We are concerned here with the relationship between Chebyshev sets and convex sets in a Banach space. The topic has been thoroughly explored in the finite-dimensional case, but the infinite-dimensional situation is more delicate. A good list of references appears in [4].

It is easy to see that if a Banach space E is rotund (= strictly convex) and reflexive, then every closed convex subset of E is a Chebyshev set. That this property characterizes the rotund reflexive spaces can be deduced from JAMES's characterization of reflexivity [6]. On the other hand, by reasoning initiated by MOTZKIN [12] and extended by JESSEN [7], BUSEMANN [1], and others (see the bibliography of [4]), a Banach space E of finite dimension ≥ 3 is smooth if and only if every Chebyshev set in E is convex. There remains the problem of characterizing the infinite-dimensional Banach spaces in which every Chebyshev set is convex. Despite contributions by F. A. FICKEN (unpublished, communicated to the author in 1951), the author [9], and EFIMOV and STECHKIN [3, 4], the problem is far from solution. Indeed, it is conceivable, on the one hand, that no such space exists and, on the other hand, that every smooth Banach space has the property.

FICKEN's method, which applies only in inner-product spaces, is discussed in § 1 below. By inversion in spheres, it establishes a close connection between the problem of nearest points — "Must a Chebyshev set be convex?" — and a related problem involving farthest points. The author's result [9] asserted that in a smooth reflexive Banach space, a Chebyshev set must be convex if the associated *metric projection* (carrying each point of the space onto that point of the set which is nearest to it) is both continuous and weakly continuous. Since the argument was garbled in [9], we include in § 2 below a careful proof of a slightly stronger theorem. Among the results of [9], [3], and [4], none includes another; however, each of them (as well as FICKEN's theorem) implies

*) Research fellow of the Alfred P. Sloan Foundation.

that in Hilbert space, every compact Chebyshev set is convex, while failing to cover even the case of a weakly compact Chebyshev set. Of these results, the most satisfactory is that of EFIMOV and STECHKIN in [4], asserting that in a Banach space which is smooth and uniformly rotund (= uniformly convex), every boundedly compact Chebyshev set is convex. After some preliminary material in § 3 below, we establish in § 4 the principal result of the present paper: *in a Banach space which is uniformly smooth and uniformly rotund, every weakly closed Chebyshev set is convex*. Thus in such a space, a set is closed and convex if and only if it is a weakly closed Chebyshev set. This is the first infinite-dimensional characterization of closed convex sets in terms of the Chebyshev property. (However, even in Hilbert space it remains unknown whether a Chebyshev set must be convex, or, equivalently, whether it must be weakly closed.) The reasoning of § 4 is an adaptation of JESSEN's proof [7] to allow for the fact that cells in the space need not be compact; with the aid of a technique introduced in [10], the role of compactness is played by completeness in conjunction with a sort of Lipschitzian condition.

Explanation may be required for two aspects of notation and terminology. Set-theoretic union and difference are indicated by \cup and \sim , the symbols $+$ and $-$ being reserved for algebraic operations. A *sphere* in a normed linear space is a set of the form $\{x: \|x - c\| = r\}$ and the corresponding *cell* is the set $\{x: \|x - c\| \leq r\}$. The *unit sphere* and *unit cell* are those for which $c = 0$ and $r = 1$, where 0 denotes the neutral element of the space. We suggest [2] as a general reference for terminology and basic results employed here without specific reference.

§ 1. Ficken's method

In 1951, Professor FICKEN showed the author a proof that in Hilbert space, every compact Chebyshev set is convex. The present section consists of that proof together with some remarks due to the author. We are indebted to Professor FICKEN for permission to discuss his method here.

If E is a normed linear space, $c \in E$, $r > 0$, and Σ is the sphere $\{x \in E: \|x - c\| = r\}$, then the *inversion of E in Σ* is the transformation of $E \sim \{c\}$ onto itself which carries a point $y \in E \sim \{c\}$ onto the point $c + (r^2/\|y - c\|^2)(y - c)$. For the sake of completeness, we include a proof of the following well-known fact:

1.1 Proposition. *Suppose E is an inner-product space, Σ a sphere in E , ξ the inversion of E in Σ , and S a sphere in E not containing the center of Σ . Then the set ξS is also such a sphere.*

Proof. We assume without loss of generality that for some $\varepsilon > 0$, Σ is the sphere with center 0 and radius $1/\varepsilon$. Then with $x' = \xi x$, we have $x = \varepsilon x'/(x', x')$. The following statements are easily proved to be equivalent: (i) S is a sphere in $E \sim \{0\}$; (ii) for some $p \in E$ and some real r with $0 \neq r^2 \neq (p, p)$, $S = \{x: (x - p, x - p) = r^2\}$; (iii) for some $v \in E$ and some real a with $0 \neq a < \frac{1}{4}(v, v)$,

$S = \{x: (x, x) + (v, x) + a = 0\}$. Thus for appropriate a and v , the following statements are equivalent:

$$\begin{aligned} x' &\in \xi S; \\ x &\in S; \\ \frac{\varepsilon^2(x', x')}{(x', x')^2} + \frac{\varepsilon(v, x')}{(x', x')} + a &= 0; \\ (x', x') + (a^{-1} \varepsilon v, x') + a^{-1} \varepsilon^2 &= 0. \end{aligned}$$

And clearly

$$0 \neq a^{-1} \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon^2}{a^2} a < \frac{\varepsilon^2}{4a^2} (v, v) = \frac{1}{4} (a^{-1} \varepsilon v, a^{-1} \varepsilon v),$$

so ξS is a sphere in $E \sim \{0\}$ and the proof is complete.

In order to give FICKEN's result in a sharpened form, we introduce the following notion which will appear also in § 4: in a metric space M , a set X is *Chebyshevian at a point* $z \in M$ provided $z \notin X$ and a unique nearest point in X is admitted by each point $y \in M$ for which $\varrho(y, z) < \varrho(y, X)$ ($= \inf_{x \in X} \varrho(y, x)$). Clearly X is a Chebyshev set in M if and only if it is Chebyshevian at each point of $M \sim X$.

1.2 Theorem. Suppose E is an inner-product space, \mathfrak{X} is a class of subsets of E , \mathfrak{Y} is a class of convex subsets of E , and \mathfrak{X} and \mathfrak{Y} are related as follows:

whenever $X \in \mathfrak{X}$, $x \in (\text{conv } X) \sim X$, and ξ is the inversion of E in a sphere centered at x , then $\text{conv } \xi X \in \mathfrak{Y}$;

whenever $Y \in \mathfrak{Y}$, y is an inner point of a line segment in Y , and η is the inversion of E in a sphere centered at y , then $\eta(Y \sim \{y\}) \in \mathfrak{X}$.

Then the following two statements are equivalent:

1° if $X \in \mathfrak{X}$ and X is Chebyshevian at a point y , then $y \notin \text{conv } X$;

2° if $Y \in \mathfrak{Y}$ and each point of E admits a unique farthest point in Y , then Y consists of a single point.

Proof. Suppose first that 1° holds, $Y \in \mathfrak{Y}$, and each point of E admits a unique farthest point in Y . Suppose Y includes more than one point, whence, being convex, it contains a nondegenerate line segment σ . Let y be an inner point of σ and let η denote the inversion of E in a sphere centered at y . By hypothesis, $\eta(Y \sim \{y\}) \in \mathfrak{X}$, and it is evident that

$$y \in \text{conv } (\eta(\sigma \sim \{y\})) \subset \text{conv } \eta(Y \sim \{y\}),$$

whence from 1° it follows that the set $\eta(Y \sim \{y\})$ is not Chebyshevian at the point y . Thus there is in E a cell C with spherical boundary S such that

$$y \in \text{int } C \subset E \sim \eta(Y \sim \{y\}),$$

C is at zero distance from the set $\eta(Y \sim \{y\})$, and the sphere S either misses this set or includes at least two points of it. With the aid of 1.1 we see that the set ηS is a sphere in E which encloses the set $\eta \eta(Y \sim \{y\}) = Y \sim \{y\}$, is at zero distance from it, and includes either no points or at least two points of it. But then the center of ηS does not have a unique farthest point in the set Y , and the contradiction shows that 1° implies 2°.

Now suppose 2° holds, $X \in \mathfrak{X}$, and X is Chebyshevian at a point $x \in \text{conv } X$. Let ξ denote the inversion of E in a sphere centered at x . By hypothesis, $\text{conv } \xi X \in \mathfrak{Y}$, and since $x \in (\text{conv } X) \sim X$ we see that X contains more than one point. From 2° there follows the existence of a point $p \in E$ such that if S is the boundary of the smallest cell which is centered at p and contains the set $\text{conv } X$, then S includes either no points or at least two points of $\text{conv } X$, hence either no points or at least two points of the set X itself. But then the set ξS must be a sphere enclosing x whose center admits no unique nearest point in X , and the contradiction shows that 2° implies 1° , completing the proof of Theorem 1.2.

In [7], JESSEN characterized the convex bodies B in E^n which are such that each point of $E^n \sim B$ admits a unique farthest point in B . Convexity of Chebyshev sets in E^n may be deduced from 1.2 and the following easily proved fact, stated at the end of [13] by MOTZKIN, STRAUS, and VALENTINE: if a subset Y of E^n is such that each point of E^n admits a unique farthest point in Y , then Y must consist of a single point. Their result may be extended as follow:

1.3 Proposition. *If Y is a compact subset of a Banach space, and each point of the set $cl \text{ conv } Y$ admits a unique farthest point in Y , then Y consists of a single point.*

1.4 Proposition. *Suppose Y is a subset of a Banach space E and each point of E admits a unique farthest point in Y . If Y is totally bounded and E rotund, or E is finite-dimensional with polyhedral unit cell, then Y consists of a single point.*

Proof. We first prove 1.3. By a theorem of MAZUR [11], the set $K = cl \text{ conv } Y$ must be compact, and thus by the fixed-point theorem of SCHAUDER (extended in [15]) every continuous mapping of K into K must admit a fixed point. For each $p \in K$, let $f p$ denote the unique point of Y which is farthest from p . Since Y is compact and the distance $\|f p - p\|$ depends continuously on p , it is easy to verify that f is continuous. Thus there exists $p \in K$ for which $f p = p$, and it follows that f consists of a single point.

For 1.4 with Y totally bounded and E rotund, observe first that the set $cl Y$ is compact, so each point of E admits at least one farthest point in $cl Y$. Consider an arbitrary point $p \in E$ and a point $y \in cl Y$ farthest from p . Then y lies in the boundary of the cell

$$C = \{q \in E : \|q - p\| \leq \|y - p\|\}.$$

By hypothesis, C is rotund, and hence $C \sim \{y\}$ lies interior to the cell

$$\{q \in E : \|q - (2p - y)\| \leq 2\|y - p\|\}.$$

Thus y is the unique point of $cl Y$ which is farthest from the point $2p - y$, whence of course y must be the unique point of Y farthest from $2p - y$. It follows that p itself (an arbitrary point of E) must admit a unique farthest point in $cl Y$, and we conclude from 1.3 that Y consists of a single point.

Suppose, finally, that E is n -dimensional and the unit cell U of E is polyhedral. Let Q_1, \dots, Q_k denote the extreme supporting halfspaces of U and for each halfspace Q in E let hQ denote the bounding hyperplane of Q . Then $U = \bigcap_1^k Q_i$ and for each i the intersection $U \cap hQ_i$ is of dimension $n - 1$. For each i , let P_i denote the unique supporting halfspace of the set Y which is parallel to Q_i . Since each point of E admits a unique farthest point in Y , it can be verified that for each i the set $Y \cap hP_i$ consists of a single point w_i . Let $Y' = \text{conv} \{w_i\}_1^k$, a compact convex set. It is easy to see that a cell in E contains Y if and only if it contains Y' , and hence each point of E admits a unique farthest point in Y . From 1.3 it follows that Y' consists of a single point, whence of course the same is true of Y . Propositions 1.3 and 1.4 have now been proved.

We do not know whether the supplementary hypotheses are necessary in 1.4. In particular, the following problem is open:

Problem. Suppose T is a subset of Hilbert space \mathfrak{H} such that each point of \mathfrak{H} admits a unique farthest point in T . Must T consist of a single point?

It is easy to see that (in any normed linear space) the "unique farthest point" property of a set is inherited by its convex hull and also (in any uniformly rotund space) by its closure. Thus in the above problem, attention may be restricted to closed convex sets. We see by 1.2 that an affirmative solution to the above problem implies that every Chebyshev set in \mathfrak{H} is convex. And from 1.2 and 1.3 it follows that every boundedly compact Chebyshev set in \mathfrak{H} is convex, a set being called boundedly compact provided its intersection with each cell is compact.

In connection with these problems involving nearest and farthest points, it is of interest to recall the unsolved problem as to whether a bounded closed convex subset C of a Banach space E must admit a supporting hyperplane through at least one of its points. Observe that if this is not the case, then no point of E admits a farthest point in C and a point of $E \sim C$ admits a nearest point in C .

§ 2. Convexity with continuity assumptions

The basic lemma is as follows:

2.1 Lemma. Suppose E is a reflexive Banach space, Q is a subset of $E \sim \{0\}$, and q is a point of Q nearest to 0. Suppose there exist a neighborhood V of 0 and a closed hyperplane H through 0 supplementary to the line Rq such that the following conditions are satisfied:

- 1° for each $x \in V$, there is a unique point x' of Q which is nearest to x ;
- 2° the function $x' \mid x \in V$ is weakly continuous;
- 3° writing $x = x_1 + x_2q$ with $x_1 \in H$ and x_2 real, for each $x \in V$ it is true that $x_2 < x'_2$ and $\|x'_1 - x_1\| \leq x'_2 - x_2$.

Then there exists $t > 0$ such that $(-tq)' = q$.

Proof. Since conditions 1°—3° are satisfied by every neighborhood of 0 which lies in V , and since the entire scheme is invariant under uniform dilation

from 0, we may assume without loss of generality that $V = \{x: \|x\| \leq 2\}$ and $\|q\| > 2$. Let $W = \{x \in H: \|x\| \leq 1\}$ and $p = q/\|q\|$, so that $p_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ and $W - p \subset V$. Now $H = \{x: x_2 = 0\}$ and for each $w \in W$ it is true that $(w - p)_2 = -p_2 < 0$ and (by 3°) $(w - p)_2 < (w - p)_2'$. Thus for each $w \in W$, the ray which emanates from $w - p$ and passes through $(w - p)'$ must intersect the set H in a unique point, which we denote by Fw . In fact,

$$Fw = (1 - \lambda)(w - p) + \lambda(w - p)',$$

where the number λ is determined by the condition that $(Fw)_2 = 0$; that is,

$$\lambda = p_2/(p_2 + (w - p)_2').$$

Clearly the transformation F is weakly continuous. And for each $w \in W$ we have

$$Fw - w = (Fw - w)_1 = \lambda((w - p)_1' - (w - p)_1),$$

and (by 3°)

$$\|(w - p)_1' - (w - p)_1\| \leq (w - p)_2' - (w - p)_2 = p_2/\lambda,$$

so

$$\|Fw - w\| \leq |p_2| < 1.$$

Now for each $z \in 2W$, let $gz = z - F(\frac{1}{2}z)$. Then g is weakly continuous and

$$\|gz\| \leq \left\| \frac{1}{2}z \right\| + \left\| \frac{1}{2}z - F\left(\frac{1}{2}z\right) \right\| \leq 2,$$

so $g(2W) \subset 2W$. Since reflexivity of E implies weak compactness of the set $2W$, it follows from TYCHONOV's fixed-point theorem [15] that g admits a fixed point $z_0 \in 2W$. With $gz_0 = z_0$, we have $F(\frac{1}{2}z_0) = 0$. Recalling the relevant definitions, we see that the origin 0 must lie on the segment which joins the point $\frac{1}{2}z - p$ to the point $(\frac{1}{2}z - p)'$ in Q which is nearest to $\frac{1}{2}z - p$. An easy application of the triangle inequality then shows that $(\frac{1}{2}z - p)'$ must also be the point of Q nearest to 0, whence $(\frac{1}{2}z - p)' = q$ and $\frac{1}{2}z - p = -tq$ for some $t > 0$. This completes the proof of 2.1.

2.2 Theorem. Suppose Q is a Chebyshev set in a smooth reflexive Banach space, and each point of $E \sim Q$ admits a neighborhood on which the (restricted) metric projection of E onto Q is both continuous and weakly continuous. Then the set Q must be convex.

Proof. Consider an arbitrary point $x \in E \sim Q$, and let x' be the point of Q nearest to x . Let Y denote the set of all points $y = x' + t(x - x')$ with $t > 0$, and for each $y \in Y$ let J_y denote the open cell centered at y and having radius $\|y - x'\|$. An easy application of 2.1 shows that for each $y \in Y$, x' is the point of Q nearest to y . Thus $E \sim Q$ contains the set $\bigcup_{y \in Y} J_y$, and since E is assumed to be smooth this union must be an open halfspace which, of course, includes the point x . It follows that $x \notin \text{conv } Q$ and consequently Q is convex.

Of course we must next inquire — both when Q is merely known to be a Chebyshev set and also when Q is a convex Chebyshev set — under what circumstances the continuity conditions of 2.2 will be satisfied. Even when Q is a Chebyshev set in Hilbert space, we do not know whether the associated metric projection must be continuous. However, the following can be established:

2.3 Proposition. *In an arbitrary metric space, the metric projection onto a boundedly compact Chebyshev set must be continuous.*

2.4 Proposition. *In every uniformly rotund Banach space E , the metric projection onto a closed convex set must be continuous.*

Proofs. The proofs are straightforward and will be left to the reader. For 2.4, the same conclusion under weaker hypotheses was established by FAN and GLICKSBERG in Theorem 8 of [5].

The requirement of weak continuity of the metric projection appears to be much stronger than that of continuity, although we do not know that the first implies the second. Consider, for example, the unit cell U of an infinite-dimensional Hilbert space \mathfrak{H} . Then of course U is a Chebyshev set, but it is easy to see that for every open subset G of $\mathfrak{H} \sim U$, the metric projection of G into U is not weakly continuous at any point of G .

For any two distinct points y and z of a Banach space E , let $P(y, z)$ denote the set of all points $p \in E$ for which $\|p - y\| = \|p - z\|$. Such sets have been studied by KALISCH and STRAUS [8]. In an inner-product space every set $P(y, z)$ is a closed hyperplane, and thus every inner-product space has the following two properties:

P_1 — whenever y and z are distinct points of E , the set $P(y, z)$ is weakly closed;

P_2 — for each $x \in E$ with $\|x\| = 1$ there exists $\varepsilon_x > 0$ such that whenever y and z are distinct points of the set $x + \varepsilon_x U$, then the intersection $P(y, z) \cap (\varepsilon_x U)$ is weakly closed, U denoting the unit cell of E .

2.5 Proposition. *Suppose Q is a boundedly compact Chebyshev set in a normed linear space E . Then if E has the property P_1 , the metric projection of E onto Q is weakly continuous. And if E has the property P_2 , each point of $E \sim Q$ admits a neighborhood on which the (restricted) metric projection is weakly continuous.*

Proof. We treat only the second case, since the first is similar but simpler. And for the second case, we may replace the assumption that Q is boundedly compact by the formally weaker assumption that Q is locally compact and the metric projection π of E onto Q is continuous. Consider an arbitrary point $p \in E \sim Q$. We wish to produce a neighborhood of p on which the restriction of π is weakly continuous; for this purpose, we may assume without loss of generality that $p = 0$ and that $\pi p = x$ with $\|x\| = 1$. Let the number ε_x be as in condition P_2 above. By the continuity of π and local compactness of Q , there exists $\delta \in]0, \varepsilon_x[$ such that the set $\pi(\delta U)$ lies simultaneously in $x + \varepsilon_x U$ and in a compact subset of Q . We claim that the restriction of π to the set $(\delta/2)U$ is weakly continuous. Suppose it is not. Then there exists a net u_α in

$(\delta/2)U$, α ranging over some directed set, such that u_α is weakly convergent to a point $u \in (\delta/2)U$, πu_α is norm-convergent to a point $z \in Q \cap (x + \varepsilon_x U)$, and $z \neq \pi u$. Recalling the definition of π , we see that $\|u - z\| > \|u - \pi u\|$, while

$$\limsup \|u_\alpha - z\| = \limsup \|u_\alpha - \pi u_\alpha\| \leq \limsup \|u_\alpha - \pi u\|.$$

Clearly, then, there exists a net λ_α in $]0, \infty[$ such that $\limsup \lambda_\alpha \leq 1$, and such that if $v_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha + (1 - \lambda_\alpha)u$, then $v_\alpha \in P(\pi u, z) \cap (\delta U)$. But the latter set must be weakly closed by the choice of δ , and v_α is weakly convergent to u , so it follows that $u \in P(\pi u, z)$; that is, $\|u - z\| = \|u - \pi u\|$, a contradiction completing the proof.

Comparing the results 2.2, 2.3, and 2.5, we deduce

2.6 Theorem. *In a smooth reflexive Banach space which has the property P_Δ , every boundedly compact Chebyshev set is convex.*

§ 3. Uniform rotundity and smoothness

In the present section we establish some elementary consequences of uniform rotundity and uniform smoothness. Though of little interest in themselves, they will be useful in § 4.

3.1 Proposition. *Let E be a normed linear space with unit cell U . Then E is uniformly rotund if and only if for each pair of positive numbers r and ε there exists a positive number $\tau(r, \varepsilon)$ such that the following condition is satisfied:*

whenever C is a cell in E of radius $\leq r$, x is a boundary point of C , y is a point of C , and $\|x - y\| \geq \varepsilon$, then there exist a weakly open set $W \ni x$ and a number $\eta > 0$ such that

$$(W \cap C) + t(y - x)/\|y - x\| + t\tau(r, \varepsilon)U \subset C$$

for all $t \in [0, \eta]$.

Proof. It will be left for the reader to verify that the stated condition is equivalent to the following (where S is the unit sphere of E):

(†) for each $\varepsilon > 0$ there exists $\tau_\varepsilon > 0$ such that whenever $x \in S$, $y \in U$, and $\|x - y\| \geq \varepsilon$, then there exist a weak neighborhood W of x relative to U and a number $\eta > 0$ such that

$$\|w + (\eta/\varepsilon)(y - x)\| \leq 1 - \eta\tau_\varepsilon \text{ for all } w \in W.$$

Now suppose E satisfies the condition (†), x and y are as described there, and consider an arbitrary $f \in E^*$ with $\|f\| = fx$. With $p = x + (\eta/\varepsilon)(y - x)$, we have $\|p\| \leq 1 - \eta\tau_\varepsilon$ and $y = (1 - \varepsilon/\eta)x + (\varepsilon/\eta)p$, whence

$$fy = (1 - \varepsilon/\eta)fx + (\varepsilon/\eta)fp = \|f\|(1 - \varepsilon/\eta) + \|f\|(1 - \eta\tau_\varepsilon)(\varepsilon/\eta) = \|f\|(1 - \varepsilon\tau_\varepsilon).$$

It follows from RUSTON's characterization [14] that E is uniformly rotund.

Suppose, conversely, that E is uniformly rotund. Then for each $\varepsilon > 0$ there exists $\delta_\varepsilon > 0$ such that whenever $x \in S$, $y \in U$, and $\|x - y\| \geq \varepsilon$, then $\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\| = 1 - \delta_\varepsilon$. And from RUSTON's characterization it follows that every neighborhood (under the norm topology) of a point of S relative to U is also a weak

neighborhood relative to U . For an arbitrary $\varepsilon > 0$, let $\tau_\varepsilon = \delta_\varepsilon/\varepsilon > 0$. Consider arbitrary points $x \in S$ and $y \in U$ with $\|x - y\| \geq \varepsilon$, and let $W = (x + (\delta_\varepsilon/2)U) \cap U$ and $\eta = \varepsilon/2$. Then for each $w \in W$ we have

$$\|w + (\eta/\varepsilon)(y - x)\| \leq \|w - x\| + \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \leq \frac{1}{2}\delta_\varepsilon + (1 - \delta_\varepsilon) = 1 - \eta\tau_\varepsilon,$$

so condition (†) is satisfied and the proof of 3.1 is complete.

We wish now to introduce another notion which will be employed in § 4. (See [2] for background material.) Let E be a normed linear space with unit cell U and unit sphere S . Recall that smoothness of E is equivalent to Gateaux differentiability of its norm. That is, U admits a unique supporting hyperplane through each point of S if and only if for each $x \in S$ and each $h \in E$, there exists

$$(*) \quad G(x, h) = \lim_{t \rightarrow 0} (\|x + th\| - \|x\|)/t.$$

The norm in E is said to be Frechet differentiable provided for each $x \in S$, the convergence in (*) is uniform over $h \in S$, and uniformly Frechet differentiable provided the convergence in (*) is uniform over $(x, h) \in S \times S$. The latter condition is equivalent to uniform smoothness of E . We consider here a related but different condition, saying that E (that is, the norm or the unit cell of E) is *uniformly smooth in the direction* $h_0 \in E \sim \{0\}$ provided when $h = h_0$, the convergence in (*) is uniform over $x \in S$. If E is uniformly smooth, then of course it is uniformly smooth in each direction. We say that $h_0 \in E \sim \{0\}$ is an *osculatory direction* for the unit cell U provided for each $\varepsilon > 0$, the set $Z(h_0, \varepsilon)$ is bounded, where $Z(h_0, \varepsilon)$ is the set of all $z \in E \sim \{0\}$ for which $\|z - h_0\| - \|z\| > \varepsilon < \|z + h_0\| - \|z\|$.

3.2 Proposition. *Let U be the unit cell of a normed linear space E . Then if U is uniformly smooth in the direction $h_0 \in E \sim \{0\}$, h_0 must be an osculatory direction for U .*

Proof. Consider an arbitrary $\varepsilon > 0$, and for each $z \in Z(h_0, \varepsilon)$ let $x_z = z/\|z\| \in S$, $t_z = -1/\|z\|$, and $t'_z = 1/\|z\|$. Then for each $z \in Z(h_0, \varepsilon)$ it is true that

$$(\|x_z + t_z h_0\| - \|x_z\|)/t_z < -\varepsilon$$

and

$$(\|x_z + t'_z h_0\| - \|x_z\|)/t'_z > \varepsilon.$$

But then if the set $Z(h_0, \varepsilon)$ is unbounded, these inequalities clearly preclude that the limit $G(x, h_0)$ in (*) shall exist uniformly for $x \in S$.

If the plane be assigned the norm $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$, then $(1, 0)$ is an osculatory direction for the unit cell U even though U is not uniformly smooth in the direction $(1, 0)$. However, we do not know whether a Banach space must be uniformly smooth in every direction if every direction is an osculatory direction for the unit cell.

3.3 Proposition. *If E is a normed linear space with unit cell U , and L is a linear subspace of E , then the following two statements are equivalent:*

1° *every direction in L is an osculatory direction for U ;*

2° for each $\varepsilon > 0$ and each subset X of L with $0 \in \text{conv } X$, there exists $r(\varepsilon, X) < \infty$ such that whenever C is a cell in E which includes 0 and is of radius $\geq r(\varepsilon, X)$, then some point of C lies within a distance $\leq \varepsilon$ of the set X .

Proof. From the definition of osculatory direction, it is easy to verify that 1° and 2° are equivalent when L is one-dimensional. Thus the proof of 3.3 can be reduced to showing that if 1° implies 2° whenever L is of dimension $< k$, then the same implication is valid for a k -dimensional L . Consider, then, a k -dimensional linear subspace L of E , a subset X of L with $0 \in \text{conv } X$, and a positive number ε . By Caratheodory's theorem, there must be a positive integer $n \leq k$, points x_0, x_1, \dots, x_n of X , and positive numbers t_i whose sum is 1, such that $0 = \sum_{i=0}^n t_i x_i$. Let $p = \sum_{i=1}^n (s_i/(1-s_0)) x_i$, whence $0 \in \text{conv } \{x_0, p\}$ and $0 \in \text{conv } \{x_i - p : 1 \leq i \leq n\}$. By the inductive hypothesis, there exist numbers $r_1, r_2 < \infty$ such that every cell in E which includes 0 and is of radius $\geq r_1$ must include a point within $\varepsilon/2$ of the set $\{x_0, p\}$, and every cell in E which includes 0 and is of radius $\geq r_2$ must include a point within $\varepsilon/2$ of the set $\{x_i - p : 1 \leq i \leq n\}$. Now consider in E an arbitrary cell C which is of radius $\geq \max(r_1, r_2)$, and let C' denote the concentric cell whose radius is $\varepsilon/2$ greater than that of C . Suppose $0 \in C$. Then by the choice of r_1 , $x_0 \in C'$ or $p \in C'$. In the latter case, it follows from the choice of r_2 that some point of C' lies within $\varepsilon/2$ of the set $\{x_i - p : 1 \leq i \leq n\} + p$. In any case, some point of C lies within distance $\leq \varepsilon$ of some point x_i , and the proof of 3.3 is complete.

§ 4. Principal result

4.1 Theorem. *In a Banach space E which is uniformly rotund and is uniformly smooth in each direction, a weakly closed set cannot be Chebyshevian at any point of its convex hull.*

4.2 Corollary. *With E as in 4.1, a subset of E is closed and convex if and only if it is a weakly closed Chebyshev set.*

The "only if" part of 4.2 is well-known. For the "if" part, observe that if a weakly closed subset X of E is a Chebyshev set, then it is Chebyshevian at each point of $E \sim X$, whence by 4.1 no such point is in the convex hull of X and consequently X is convex. The proof of 4.1 will be based on the following lemma:

L° *Suppose Z is a weakly closed subset of E (as described above), $z_0 \in \text{conv}(\text{int } Z) \sim Z$, and Y is the set of all $y \in E$ for which $\|y - z_0\| \leq \varrho(y, Z) \geq \varrho(z_0, Z)$. Then some point of Y admits at least two nearest points in Z .*

Let us see how Theorem 4.1 can be deduced from the lemma L°. Consider an arbitrary weakly closed subset X of E and a point $x \in (\text{conv } X) \sim X$. We wish to show that X is not Chebyshevian at x . Let U denote the unit cell of E , choose $\delta \in]0, \varrho(x, X)[$, and let $Z = X + \delta U$. The set U is weakly compact for E , being uniformly rotund, must be reflexive; since X is weakly closed, it follows that Z is weakly closed. Since $x \in \text{conv}(\text{int } Z) \sim Z$, from L° there follows the existence of a point $y \in E$ with $\|y - x\| \leq \varrho(y, Z)$ such that y

admits at least two nearest points z_1 and z_2 in Z . There are points x_i of X and u_i of U such that $z_i = x_i + u_i$. For an arbitrary point w of X it is true that

$$\|w - y\| = \|w - (w + \delta u)\| + \|(w + \delta u) - y\|,$$

where $u = (y - w)/\|y - w\| \in U$ and $w + \delta u \in Z$. Consequently

$$\begin{aligned} \|x_i - y\| &= \|(z_i - \delta u_i) - y\| \leq \|z_i - y\| + \delta \|u_i\| \\ &= \|(w + \delta u) - y\| + \delta = \|w - y\|, \end{aligned}$$

and it follows that x_1 and x_2 are both points of X nearest to y . Further, $x_i - y$ is a multiple of $z_i - y$, for otherwise it follows from rotundity of E that

$$\|x_i - y\| < \|x_i - z_i\| + \|z_i - y\|,$$

and hence that the point $x_i + (y - x_i)/\|y - x_i\|$ is a point of Z nearer to y than z_i , an impossibility. Since $x_i - y$ is a multiple of $z_i - y$, and $z_1 \neq z_2$, it follows easily that $x_1 \neq x_2$. Since, further, $\|y - x\| \leq \varrho(y, Z) < \varrho(y, X)$, it follows that X is not Chebyshevian at x .

It remains only to establish the lemma L^0 . By hypothesis, there exist a finite subset J of Z and a neighborhood V of 0 such that $z_0 \in \text{conv } J$ and $J + V \subset Z$. Since E is assumed to be uniformly smooth in each direction, there follows from 3.2 and 3.3 the existence of a number $r < \infty$ such that whenever a cell in E includes the point z_0 and its interior misses the set Z , then the radius of the cell is $\leq r$. Thus the set Y must be bounded, for $\|y - z_0\| \leq \varepsilon \leq \varrho(y, Z)$ for all $y \in Y$. Let $\varepsilon = \varrho(z_0, Z) > 0$ and let the number $\tau = \tau(r, \varepsilon)$ be as in 3.1.

Since Z is weakly closed by hypothesis, and the unit cell U of E is weakly compact, each point of E must admit at least one nearest point in Z . Let us assume that L^0 fails, whence each point $y \in Y$ admits a unique nearest point y' in Z . We wish to derive a contradiction from this assumption. Let I denote the set of all countable ordinal numbers. We shall define (by means of transfinite induction) a certain function ζ on I to Y , and then show that ζ has contradictory properties. Let $\zeta 0 = z_0 \in Y$, and let us make the notational convention that whenever $\zeta \gamma$ has been defined, then $\varrho \gamma$ will denote the distance $\varrho(\zeta \gamma, Z)$. When $\gamma \in I - \{0\}$ and $\zeta \beta$ has been defined for all ordinals $\beta < \gamma$, then $\zeta \gamma$ is defined by the following rules:

when γ is a limit ordinal —

if the net $(\zeta \beta)_{0 \leq \beta < \gamma}$ converges to a point of Y , choose this point as $\zeta \gamma$; otherwise set $\zeta \gamma = z_0$. (We shall see later that the second possibility cannot arise.)

when γ has an immediate predecessor γ^- , proceed as follows —

Since $\zeta \gamma^- = y \in Y$, the cell

$$C = \{x \in E: \|x - y\| \leq \varrho \gamma^-\}$$

must include the point z_0 and must include (in its boundary) a unique point y' of Z . Since $\varrho \gamma^- \leq r$ and $\|z_0 - y'\| \geq \varepsilon = \varrho(z_0, Z)$, there follows from 3.1 the existence of a weakly open set $W \ni y'$ and a number $\eta > 0$ such that

$$(1) \quad (W \cap C) + t(z_0 - y')/\|z_0 - y'\| + t\tau U \subset C$$

for all $t \in [0, \eta]$, where U is the unit cell of E and $\tau = \tau(r, \varepsilon)$. The set $C \sim W$ is weakly compact and is disjoint from the weakly closed set Z , so the distance between the two sets must be positive. Thus there exists $\eta' > 0$ such that

$$(2) \quad (C \sim W) + t(z_0 - y') / \|z_0 - y'\| + t\tau U \subset E \sim Z$$

for all $t \in [0, \eta']$. Then we define

$$(3) \quad \zeta \gamma = y + \min(\eta, \eta') (z_0 - y') / \|z_0 - y'\|.$$

Now consider the cell

$$K = \{x \in E : \|x - \zeta \gamma\| \leq \varrho \gamma^- + \tau \|\zeta \gamma - \zeta \gamma^-\|\}.$$

From conditions (1), (2), and (3), it follows that

$$z_0 \in K \subset E \sim Z,$$

whence

$$(4) \quad \varrho \gamma^- < \varrho \gamma \text{ and } \|\zeta \gamma - \zeta \gamma^-\| \leq \tau^{-1}(\varrho \gamma - \varrho \gamma^-).$$

Having defined $\zeta \gamma$ for all $\gamma \in \Gamma$, we will denote by Γ_1 the set of all ordinals $\gamma \in \Gamma$ such that whenever $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \gamma$, then

$$\varrho \beta_1 \leq \varrho \beta_2, \text{ with equality only if } \zeta \beta_1 = \zeta \beta_2,$$

and

$$\|\zeta \beta_2 - \zeta \beta_1\| \leq \tau^{-1}(\varrho \beta_2 - \varrho \beta_1).$$

We claim that $\Gamma_1 = \Gamma$, and will prove this by transfinite induction. Obviously $0 \in \Gamma_1$. Now suppose Γ_1 is known to include all ordinals $\beta < \gamma \in \Gamma$; we wish to show that $\gamma \in \Gamma_1$. Recall the definitions of ζ and ϱ , and consider first the case in which γ has an immediate predecessor γ^- . When $\beta_1 \leq \gamma^-$, we see (upon application of (4) above in conjunction with the inductive hypothesis) that

$$\varrho \beta_1 < \varrho \gamma^- < \varrho \gamma$$

and

$$\begin{aligned} \|\zeta \gamma - \zeta \beta_1\| &\leq \|\zeta \gamma - \zeta \gamma^-\| + \|\zeta \gamma^- - \zeta \beta_1\| \leq \\ &\leq \tau^{-1}(\varrho \gamma - \varrho \gamma^-) + \tau^{-1}(\varrho \gamma^- - \varrho \beta_1) = \tau^{-1}(\varrho \gamma - \varrho \beta_1), \end{aligned}$$

whence $\gamma \in \Gamma_1$.

Consider now the case in which γ is a limit ordinal and Γ_1 includes all ordinals $\beta < \gamma$. Since always $\zeta \gamma \in Y$, $\varrho \gamma = \varrho(\zeta \gamma, Z)$, and the set Y is bounded (as observed earlier), the set $\{\varrho \beta : \beta < \gamma\}$ is bounded. But for all $\beta_1 \leq \beta_2 < \gamma$ we have by the inductive hypothesis that

$$\|\zeta \beta_2 - \zeta \beta_1\| \leq \tau^{-1}(\varrho \beta_2 - \varrho \beta_1).$$

It is therefore easy to verify that $(\zeta \beta)_{\beta < \gamma}$ is indeed a Cauchy net, which by the completeness of Y must converge to a point of Y . Since this point is $\zeta \gamma$, the fact that $\gamma \in \Gamma_1$ is now an easy consequence of the continuity of the function $\varrho(x, Z) \mid x \in E$. We conclude that $\Gamma_1 = \Gamma$. But then the function $\varrho \gamma \mid \gamma \in \Gamma$ is real-valued and strictly monotone on Γ . Since it is well-known that such a function cannot exist, we have a contradiction which completes the proof.

References

- [1] BUSEMANN, H.: Note on a theorem of convex sets. *Mat. Tidsskr. B.* **1947**, 32—34.
- [2] DAY, M. M.: Normed linear spaces. *Ergeb. Math. Grenz.* no. 21. Berlin 1959.
- [3] EFIMOV, N. V., and S. B. STECHKIN: Chebyshev sets in Banach spaces (Russian). *Doklady Akad. Nauk SSSR* **121**, 582—585 (1958).
- [4] EFIMOV, N. V., and S. B. STECHKIN: Some supporting properties of sets in Banach spaces as related to Chebyshev sets (Russian). *Doklady Akad. Nauk SSSR* **127**, 254—257 (1959).
- [5] FAN, KY, and I. GLICKSBERG: Some geometric properties of the spheres in a normed linear space. *Duke Math. J.* **25**, 553—568 (1958).
- [6] JAMES, R. C.: Reflexivity and the supremum of linear functionals. *Ann. Math.* **66**, 159—169 (1957).
- [7] JESSEN, B.: Two theorems on convex point sets (Danish). *Mat. Tidsskr. B.* **1940**, 66—70.
- [8] KALISCH, G. K., and E. G. STRAUS: On the determination of points in a Banach space by their distances from the points of a given set. *An. Acad. Brasil Ci.* **29**, 501—519 (1957).
- [9] KLEE, V.: Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space. *Trans. Am. Math. Soc.* **74**, 10—43 (1953).
- [10] KLEE, V.: Relative extreme points and weak compactness. *Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces*. Jerusalem, July 1960.
- [11] MAZUR, S.: Über die kleinste konvexe Menge, die eine gegebene kompakte Menge enthält. *Studia Math.* **2**, 7—9 (1930).
- [12] MOTZKIN, TH.: Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes. *Atti. R. Accad. Lincei, Rend.* VI s. 21, 562—567 (1935).
- [13] MOTZKIN, T. S., E. G. STRAUS and F. A. VALENTINE: The number of farthest points. *Pacific J. Math.* **3**, 221—232 (1953).
- [14] RUSTON, A. F.: A note on convexity in Banach spaces. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **45**, 157—159 (1949).
- [15] TYCHONOV, A.: Ein Fixpunktsatz. *Math. Ann.* **111**, 767—776 (1935).

(Received June 1, 1960)

A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem*

By

KY FAN in Detroit

Dedicated to Professor MARSTON MORSE

1. Let X be a compact convex set in a topological vector space Y . Let Z be a topological group and let $\mathcal{C}(Z)$ denote the space of all non-empty compact sets in Z . Let $f, g: X \rightarrow \mathcal{C}(Z)$ be two transformations from X into $\mathcal{C}(Z)$. Thus, for each $x \in X$, $f(x)$ and $g(x)$ are non-empty compact sets in Z . Theorem 1 gives sufficient conditions for the existence of a point $x \in X$ such that $f(x) \cap g(x) \neq \emptyset$. Theorem 2, which generalizes TYCHONOFF's fixed point theorem [8], is immediately obtained by applying Theorem 1 to the case when Z is a locally convex topological vector space. Analogous to Theorem 1, Theorem 3 is a result concerning two continuous mappings from a compact convex set into a uniform space.

There is certain similarity between our results and KAKUTANI's generalization [6] of the Brouwer fixed point theorem or further extensions obtained by homological arguments in [1], [3], and by homology-free arguments in [4], [5]. However, our results neither include KAKUTANI's theorem, nor are included in these extensions of KAKUTANI's theorem. The proofs in the present paper neither use homological consideration, nor invoke any known fixed point theorem. The results are derived directly from KNASTER-KURATOWSKI-MAZURKIEWICZ's theorem [7], which was used in their well-known proof of BROUWER's theorem.

All vector spaces considered are real vector spaces. All topological structures (whether in a topological vector space, or in a topological group, or in a uniform space) are implicitly assumed to satisfy Hausdorff separation axiom.

2. Since KNASTER-KURATOWSKI-MAZURKIEWICZ's theorem applies only to the finite dimensional case, it is necessary to reformulate it in the following generalized form.

Lemma 1. *Let X be an arbitrary set in a topological vector space Y . To each $x \in X$, let a closed set $F(x)$ in Y be given such that the following two conditions are satisfied:*

(i) *The convex hull of any finite subset $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ of X is contained in $\bigcup_{i=1}^n F(x_i)$.*

(ii) *$F(x)$ is compact for at least one $x \in X$.*

Then $\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$.

* This work was supported by the U. S. Atomic Energy Commission at Argonne National Laboratory.

Proof. It suffices to show that $\bigcap_{i=1}^n F(x_i) \neq \emptyset$ for any finite subset $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ of X . Given $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$, consider the $(n-1)$ -simplex $S = v_1 v_2 \dots v_n$ in the Euclidean n -space with vertices $v_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $v_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$, and define a continuous mapping $\varphi: S \rightarrow Y$ by $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ for $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Consider the n closed subsets $G_i = \varphi^{-1}F(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) of S . By (i), for any indices $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, the $(k-1)$ -simplex $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}$ is contained in $G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_k}$. By KNASTER-KURATOWSKI-MAZURKIEWICZ's theorem, this implies $\bigcap_{i=1}^n G_i \neq \emptyset$ and therefore $\bigcap_{i=1}^n F(x_i) \neq \emptyset$.

3. For a topological group Z , we shall denote by $\mathcal{C}(Z)$ the topological space of all non-empty compact sets in Z , with the topology defined in the usual way as follows. For $A \in \mathcal{C}(Z)$ and for any neighborhood V of the identity e of Z , let

$$\tilde{V}(A) = \{B \in \mathcal{C}(Z) \mid B \subset AV, A \subset BV\}.$$

When V varies over all neighborhoods of e , the family of all sets $\tilde{V}(A)$ is taken as a fundamental system of neighborhoods of A in $\mathcal{C}(Z)$.

Let X be a topological space, and Z a topological group. According to the definition of the topology of $\mathcal{C}(Z)$, a transformation $f: X \rightarrow \mathcal{C}(Z)$ is continuous on X , if and only if, for any $x_0 \in X$ and for any neighborhood V of the identity e in Z , there is a neighborhood N of x_0 in X such that $f(x) \subset f(x_0) \cdot V$ and $f(x_0) \subset f(x) \cdot V$ hold for all $x \in N$. A transformation $g: X \rightarrow \mathcal{C}(Z)$ will be said to be *upper semi-continuous* on X , if and only if, for any $x_0 \in X$ and for any neighborhood V of e , we can find a neighborhood N of x_0 in X such that $g(x) \subset g(x_0) \cdot V$ for all $x \in N$.

Lemma 2. Let X be a topological space and Z a topological group. Let $f, g: X \rightarrow \mathcal{C}(Z)$ be two upper semi-continuous transformations. If F is a non-empty closed set in Z , then

$$E = \{x \in X \mid F \cdot f(x) \cap g(x) \neq \emptyset\}$$

is closed in X .

Proof. Let $x_0 \in X$ and $x_0 \notin E$. As $f(x_0)$ is compact and F is closed, $F \cdot f(x_0)$ is closed. Then, since the compact set $g(x_0)$ is disjoint from the closed set $F \cdot f(x_0)$, there is a neighborhood V of the identity e in Z such that $F \cdot f(x_0) \cdot V \cap g(x_0) \cdot V = \emptyset$. Choose a neighborhood N of x_0 in X such that $f(x) \subset f(x_0) \cdot V$ and $g(x) \subset g(x_0) \cdot V$ for all $x \in N$. Then for $x \in N$ we have $F \cdot f(x) \cap g(x) = \emptyset$ or $x \notin E$. Hence E is closed in X .

Lemma 3. Let X be a topological space and Z a topological group. Let $f: X \rightarrow \mathcal{C}(Z)$ be continuous on X . If G is an open set in Z , then

$$H = \{x \in X \mid f(x) \cap G = \emptyset\}$$

is closed in X .

Proof. Let $x_0 \in X$ and $x_0 \notin H$. Consider any $z \in f(x_0) \cap G$. Then $V = G^{-1}z$ is an open neighborhood of e in Z . Choose a neighborhood N of x_0 in X such that $f(x_0) \subset f(x) \cdot V$ for all $x \in N$. Then for each $x \in N$, we have $z \in f(x_0) \subset f(x) \cdot V$, $f(x) \cap zV^{-1} \neq \emptyset$ and therefore $f(x) \cap G \neq \emptyset$. Thus $H \cap N = \emptyset$ and H is closed in X .

4. We proceed now to prove the following result.

Theorem 1. Let X be a compact convex set in a topological vector space Y . Let Z be a topological group and let $\mathcal{C}(Z)$ denote the space of all non-empty compact sets in Z . Let $f: X \rightarrow \mathcal{C}(Z)$ be a continuous transformation and $g: X \rightarrow \mathcal{C}(Z)$ an upper semi-continuous transformation such that the following two conditions are fulfilled:

- (i) For each $x' \in X$, there is an $x'' \in X$ such that $f(x') \cap g(x'') \neq \emptyset$.
- (ii) Given any neighborhood V of the identity e in Z , there is a neighborhood W of e with the following property: For every point $x_0 \in X$ and for any finite subset $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ of X , the relations $W \cdot f(x_0) \cap g(x_i) \neq \emptyset$ ($1 \leq i \leq n$) imply $V \cdot f(x_0) \cap g(x) \neq \emptyset$ for every point x in the convex hull of $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Then there exists a point $\hat{x} \in X$ such that $f(\hat{x}) \cap g(\hat{x}) \neq \emptyset$.

Proof. Let \mathcal{N} denote the family of all open neighborhoods of e in Z . For each $V \in \mathcal{N}$, let

$$\Phi(V) = \{x \in X \mid V \cdot f(x) \cap g(x) \neq \emptyset\}.$$

By Lemma 2, $\Phi(V)$ is closed in X . If we can prove $\Phi(V) \neq \emptyset$ for every $V \in \mathcal{N}$, then it will follow that

$$\bigcap_{i=1}^n \Phi(V_i) \supset \Phi\left(\bigcap_{i=1}^n V_i\right) \neq \emptyset$$

for any finite number of V_1, V_2, \dots, V_n in \mathcal{N} . The compactness of X will then imply $\bigcap_{V \in \mathcal{N}} \Phi(V) \neq \emptyset$. Since every point $\hat{x} \in \bigcap_{V \in \mathcal{N}} \Phi(V)$ satisfies $f(\hat{x}) \cap g(\hat{x}) \neq \emptyset$, it remains to show that $\Phi(V) \neq \emptyset$ for every $V \in \mathcal{N}$.

Consider an arbitrarily fixed $V \in \mathcal{N}$. For this V , we choose a $W \in \mathcal{N}$ with the property stated in the hypothesis (ii) of the theorem. For each $x \in X$, let

$$F(x) = \Phi(V) \cup \{y \in X \mid W \cdot f(y) \cap g(x) = \emptyset\}.$$

Since $W \cdot f(y) \cap g(x) = \emptyset$ is equivalent to $f(y) \cap W^{-1} \cdot g(x) = \emptyset$, and $W^{-1} \cdot g(x)$ is open, $\{y \in X \mid W \cdot f(y) \cap g(x) = \emptyset\}$ is closed, by Lemma 3. Hence $F(x)$ is compact. We claim that $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in \bigcup_{i=1}^n F(x_i)$ for any finite subset $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

of X and for any $\alpha_i \geq 0$ with $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. In fact, if $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \notin \Phi(V)$, then

$V \cdot f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) \cap g\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) = \emptyset$; so by our choice of W , for at least one index i , we have $W \cdot f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) \cap g(x_i) = \emptyset$ and therefore $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \in F(x_i)$. By Lemma 1, there is an $x' \in \bigcap_{x \in X} F(x)$. By (i), we can choose $x'' \in X$ such that $f(x') \cap g(x'') \neq \emptyset$.

Then $W \cdot f(x') \cap g(x'') \neq \emptyset$ and $x' \in F(x'')$ imply $x' \in \Phi(V)$. Hence $\Phi(V) \neq \emptyset$ and the theorem is proved.

When $g(x)$ is a single point of Z for every $x \in X$, the upper semi-continuity of $g: X \rightarrow \mathcal{C}(Z)$ means that g is a continuous mapping $X \rightarrow Z$. In this case, condition (ii) of Theorem 1 may be restated as follows: *Given any neighborhood V of the identity e in Z , there is a neighborhood W of e such that, for every $x_0 \in X$, the convex hull of $\bar{g}^{-1}(W \cdot f(x_0))$ is contained in $\bar{g}^{-1}(V \cdot f(x_0))$.*

5. When a topological vector space Z is regarded as a topological group (with respect to the vector addition), we shall denote by $\mathcal{K}(Z)$ the subspace of $\mathcal{C}(Z)$ formed by all non-empty compact convex sets in Z . The following result is a consequence of Theorem 1. In the case $Y = Z$, f is a continuous mapping $X \rightarrow X$, and g is the identity mapping of X , Theorem 2 reduces to the classical fixed point theorem of Tychonoff.

Theorem 2. *Let X be a compact convex set in a topological vector space Y . Let Z be a locally convex topological vector space, and let $\mathcal{K}(Z)$ be the space of all non-empty compact convex sets in Z . Let $f: X \rightarrow \mathcal{K}(Z)$ and $g: X \rightarrow Z$ be continuous on X and satisfy the following conditions:*

- (i) $f(x) \cap g(X) \neq \emptyset$ for every $x \in X$.
- (ii) *For every closed convex set C in Z , $\bar{g}^{-1}(C)$ is convex (or empty).*

Then there exists a point $\hat{x} \in X$ with $g(\hat{x}) \in f(\hat{x})$.

Proof. By local convexity and regularity of Z , for any neighborhood V of the origin in Z , we can find a convex neighborhood W of the origin in Z such that $\bar{W} \subset V$. Then, for any $x_0 \in X$, $\bar{W} + f(x_0)$ is closed convex and therefore, by (ii), $\bar{g}^{-1}(\bar{W} + f(x_0))$ is convex. $\bar{g}^{-1}(V + f(x_0))$ contains the convex set $\bar{g}^{-1}(\bar{W} + f(x_0))$, which contains the convex hull of $\bar{g}^{-1}(W + f(x_0))$. Thus condition (ii) of Theorem 1 is satisfied (see the remark at the end of § 4).

6. We replace now the topological group in Theorem 1 by a uniform space Z , but we consider mappings $X \rightarrow Z$ only.

Theorem 3. *Let X be a compact convex set in a topological vector space Y , and let Z be a uniform space. Let $f, g: X \rightarrow Z$ be continuous mappings satisfying the following conditions:*

- (i) $f(X) \subset g(X)$.
- (ii) *For any entourage V of Z , there is an entourage W of Z such that for any*

$z \in f(X)$, any finite subset $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ of X and for any $\alpha_i \geq 0$ with $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, the relations $(z, g(x_i)) \in W$ ($1 \leq i \leq n$) imply $\left(z, g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)\right) \in V$.

Then there exists a point $\hat{x} \in X$ with $f(\hat{x}) = g(\hat{x})$.

Proof. The proof is similar to that of Theorem 1. Let \mathcal{U} denote the family of all those entourages of Z which are open in $Z \times Z$. For each $V \in \mathcal{U}$, consider the closed set

$$\Phi(V) = \{x \in X \mid (f(x), g(x)) \in \bar{V}\},$$

where \bar{V} denotes the closure of V in $Z \times Z$. The theorem will be proved, if we show that $\Phi(V) \neq \emptyset$ for every $V \in \mathcal{U}$ (see the proof of Theorem 1).

For any fixed $V \in \mathcal{U}$, choose a $W \in \mathcal{U}$ with the property described in condition (ii). To each $x \in X$, let

$$F(x) = \Phi(V) \cup \{y \in X \mid (f(y), g(x)) \notin W\}.$$

Since W is open in $Z \times Z$, $\{y \in X \mid (f(y), g(x)) \notin W\}$ is a closed subset of X . Hence $F(x)$ is compact. By Lemma 1, there is a point $x' \in \bigcap_{x \in X} F(x)$. Let $x'' \in X$ be such that $f(x') = g(x'')$. Then from $x' \in F(x'')$ it follows that $x' \in \Phi(V) \neq \emptyset$.

Again, Theorem 3 generalizes TYCHONOFF's fixed point theorem. In fact, when $Y = Z$ is a locally convex topological vector space and when g is the identity mapping of X , condition (ii) of Theorem 3 follows immediately from local convexity.

7. As a simple consequence of Lemma 1, we have

Lemma 4. *Let X be a compact convex set in a topological vector space. Let A be a closed subset of $X \times X$ with the following properties:*

(i) $(x, x) \in A$ for every $x \in X$.

(ii) *For any fixed $y \in X$, the set $\{x \in X \mid (x, y) \in A\}$ is convex (or empty). Then there exists a point $y_0 \in X$ such that $X \times \{y_0\} \subset A$.*

Proof. For each $x \in X$, let $F(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in A\}$, which is compact. By (i), (ii), the convex hull of any finite subset $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ of X is contained in $\bigcup_{i=1}^n F(x_i)$. Then, by Lemma 1, $\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset$, which is to be proved.

It is of interest to observe that TYCHONOFF's theorem can also be easily derived from Lemma 4. Let X be a compact convex set in a locally convex topological vector space Y . Let $f: X \rightarrow X$ be a continuous mapping. Let $\{p_r\}_{r \in I}$ be the set of all continuous semi-norms (see [2], pp. 93–96) on Y . For each $r \in I$, consider the closed set

$$E_r = \{y \in X \mid p_r(y - f(y)) = 0\}.$$

A point $y \in X$ is a fixed point of f , if and only if $y \in \bigcap_{r \in I} E_r$. By compactness of X , it suffices to show that $\bigcap_{i=1}^n E_{r_i} \neq \emptyset$ for every finite subset $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ of I . Given $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, Lemma 4 is applicable to the set

$$A = \left\{ (x, y) \in X \times X \mid \sum_{i=1}^n p_{r_i}(x - f(y)) \geq \sum_{i=1}^n p_{r_i}(y - f(y)) \right\}.$$

Let $y_0 \in X$ be such that $X \times \{y_0\} \subset A$. Then from $(f(y_0), y_0) \in A$ we get $p_{r_i}(y_0 - f(y_0)) = 0$ ($1 \leq i \leq n$) or $y_0 \in \bigcap_{i=1}^n E_{r_i} \neq \emptyset$.

References

- [1] BEGLE, E. G.: A fixed point theorem. *Ann. Math.* (2) **51**, 544–550 (1950).
- [2] BOURBAKI, N.: *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. I, II. (Actual. Sci. et Industr. 1189.) Paris 1953.
- [3] EILENBERG, S., and D. MONTGOMERY: Fixed point theorems for multi-valued transformations. *Am. J. Math.* **68**, 214–222 (1946).

- [4] FAN, K.: Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.* **38**, 121—126 (1952).
- [5] GLICKSBERG, I. L.: A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points. *Proc. Am. Math. Soc.* **3**, 170—174 (1952).
- [6] KAKUTANI, S.: A generalization of Brouwer's fixed-point theorem. *Duke Math. J.* **8**, 457—459 (1941).
- [7] KNASTER, B., C. KURATOWSKI and S. MAZURKIEWICZ: Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n -dimensionale Simplexe. *Fundamenta Math.* **14**, 132—137 (1929).
- [8] TYCHONOFF, A.: Ein Fixpunktsatz. *Math. Ann.* **111**, 767—776 (1935).

(Received June 28, 1960)

HAUPT, O., Lokal-reguläre Bogen ohne $(n-2, k)$ -Sekanten im projektiven P_n ($n \leq k$)	225
(Anschrift: Erlangen, Spardorferstr. 45)	
SWAMY, J. CH., and N. VENKATESWARA RAO, A further Extensaion of a result of Mor-	244
dell's	
(Anschrift: 6/140-A, Siripuram, Visakhapatnam 3, South India)	
KELLER, O.-H., u. G. LIEBOLD, Bemerkungen zur Inhaltslehre der ebenen hyper-	254
bolischen Geometrie	
(Anschrift: 1. Mathematisches Institut, Halle/Saale, Universitätsplatz 8/9)	
BUTZER, P. L., On Some Theorems of Hardy, Littlewood and Titchmarsh	259
(Anschrift: Aachen/Rhld., Melatenerstr. 16)	
BUREAU, F. J., A Tauberian Theorem	270
(Anschrift: 5, Place d'Italie, Liège/Belgien)	
KLEE, V., Convexity of Chebyshev Sets	292
(Anschrift: Dept. of Mathematics, University of Washington, Seattle 5, Wash. USA)	
FAN, K., A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem	305
(Anschrift: Department of Mathematics, Wayne State University, Detroit 2, Michigan, USA)	

Einführung in die symbolische Logik

mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen

VON RUDOLF CARNAP,

Professor der Philosophie, University of California, Los Angeles

Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage

Mit 5 Textabbildungen. XII, 241 Seiten Gr.-8°. 1960. Ganzleinen DM 28,—

AUS DEN BESPRECHUNGEN DER ERSTEN AUFLAGE

„Für CARNAP ist die Logik nicht nur eine mathematische Disziplin, sondern „eine Sprache, d. h. ein System von Zeichen und von Regeln zur Verwendung dieser Zeichen“. Sein Buch, das als ein Einführungskurs gedacht ist, lehrt daher sowohl die Beherrschung und Anwendung logischer Kalküle, als auch die Deutung dieser Kalküle, so daß sie zu vollwertigen Sprachen werden. Zwei Sprachen, A und C , werden aufgebaut (B ist eine Art Zwischenform). Beide verwenden das RUSSELsche Typensystem, weil dieses allein als tauglich zum Aufbau einer deskriptiven Sprache angesehen wird, die nicht zu sehr unseren Intuitionen widerspricht. Beide Sprachen sind extensional und es wird die (zweifelhafte) Behauptung aufgestellt, daß sich alle, auch die prima facie nichtextensionalen Sätze in diese Sprache übersetzen lassen. Später bei der Anwendung werden zumeist beide Sprachen als Übersetzungsgrundlage verwendet, was einen Vergleich ihrer Brauchbarkeit ermöglicht...“

Internationale Mathematische Nachrichten

SPRINGER-VERLAG · WIEN



Im Januar 1961 beginnt zu erscheinen:

KYBERNETIK

Zeitschrift für Nachrichtenübertragung, Nachrichtenverarbeitung, Steuerung und Regelung in Automaten und im Organismus

A Journal Dealing with the Transmission and Processing of Information as well as with Control Processes in Both Automata and Organisms

Herausgegeben von / Edited by

H. B. BARLOW, Cambridge/England · M. HALLE, Cambridge/Mass. ·
B. HASSENSTEIN, Tübingen · W. D. KEIDEL, Erlangen · I. KOHLER, Innsbruck · K. KÜPFMÜLLER, Darmstadt · H. MITTELSTAEDT, Seewiesen/Obb. ·
W. REICHARDT, Tübingen · W. A. ROSENBLITH, Cambridge/Mass. ·
J. F. SCHOUTEN, Eindhoven · M. SCHÜTZENBERGER, Poitiers · K. STEINBUCH, Karlsruhe · N. WIENER, Cambridge/Mass.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften und enthält Arbeiten in englischer und deutscher Sprache. Maximal-Preis für 1961: DM 80,—

Band 1/Heft 1

Mit 72 Abbildungen. Etwa 60 Seiten. DIN A 4. 1961. Etwa DM 15,—

INHALTSVERZEICHNIS

Pawlow und sein Hund — Ein Demonstrationsmodell für den „bedingten Reflex“. Von I. KOHLER · Über die Nachrichtenverarbeitung in der Nervenzelle. Von K. KÜPFMÜLLER und F. JENIK · Die Lernmatrix. Von K. STEINBUCH · Die Lichtreaktionen von *Phycomyces*. Von W. REICHARDT · Letter constraints within words in printed English. By D. H. CARSON · Schwingungsanalyse der vestibulär, optokinetisch und durch elektrische Reizung ausgelösten Augenbewegungen beim Menschen; 1. Mitteilung: Stetige Augenbewegung: Frequenzgänge und Ortskurven. Von D. TRINCKER, J. SIEBER und J. BARTUALS · Der sogenannte „innere“ Regelkreis der Willkürbewegung. Von G. VOSSIUS · Über die Erkennungszeit beim Lesen. Von Dr. F. WENZEL.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

